

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

PUBLICATION N° 38

PROBLÈMES THERMIQUES
POSÉS PAR LA CONSTRUCTION
DES BARRAGES-RÉSERVOIRS

par

ALFRED STUCKY et MAURICE-H. DERRON

Professeurs

à l'École polytechnique de l'Université de Lausanne

SCIENCES & TECHNIQUE

Paul Feissly, libraire-éditeur

LAUSANNE

1957

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

**PUBLICATIONS
CONCERNANT LA CONSTRUCTION DES BARRAGES**

N°	Année	Titre	Prix Fr. s.
1	1947	Le barrage de la Dixence A. Stucky, professeur de travaux hydrauliques	7.—
13	1951	Contribution à l'étude des barrages-voûtes. Effet de l'élasticité des appuis A. Stucky, professeur à l'E.P.U.L. ; F. Panchaud, professeur et E. Schnitzler, chargé de cours	12.—
25	1953	Le barrage de Belver sur le Tage. Ses problèmes hydrauliques et leur résolution J.-P. Stucky, ingénieur E.P.U.L.	6.—
32	1954	Quelques problèmes relatifs aux fondations des grands barrages-réservoirs. Barrages du Mau- voisin et de la Grande Dixence A. Stucky, professeur de travaux hydrauliques	7.—
35	1955	Le barrage d'accumulation de Ben Métir, en Tunisie A. Stucky, professeur de travaux hydrauliques	7.60
38	1957	Problèmes thermiques posés par la construction des barrages-réservoirs A. Stucky et M.-H. Derron, professeurs à l'E.P.U.L.	25.—
39	1956	Technologie et contrôle des barrages en béton J.-P. Stucky, ingénieur-conseil	6.—

PROBLÈMES THERMIQUES
POSÉS PAR LA CONSTRUCTION
DES BARRAGES-RÉSEROIRS

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

PUBLICATION N° 38

PROBLÈMES THERMIQUES
POSÉS PAR LA CONSTRUCTION
DES BARRAGES-RÉSERVOIRS

par

ALFRED STUCKY et MAURICE-H. DERRON

Professeurs

à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

SCIENCES & TECHNIQUE

Paul Feissly, libraire-éditeur

LAUSANNE

1957

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
------------------------	---

CHAPITRE PREMIER

Equations générales de la transmission de chaleur. Coefficients

I - 1. Températures à l'intérieur d'un massif. Equation de Fourier	5
I - 2. Influence des dimensions du corps et de la valeur des coefficients caractéristiques de la matière sur l'évolution thermique	6
I - 2a) Corps sans dégagement de chaleur interne	6
I - 2b) Corps avec dégagement de chaleur interne	7
I - 3. Température à la surface. « Dimensions thermiques » d'un corps	9
I - 4. Valeur numérique des coefficients caractéristiques du béton	10

CHAPITRE II

Températures à l'intérieur de corps dont les faces subissent des variations de température sinusoïdales en état de régime

II - 1. Généralités	14
II - 2. Températures à l'intérieur d'un mur plan d'épaisseur L et de surface infinie, dont les faces subissent une variation de température sinusoïdale, en état de régime	14
II - 2a) Température en un point, à un instant quelconque	14
II - 2b) Température moyenne et température fictive sur les parements	20
II - 3. Effet de l'insolation	26
II - 3a) Etude mathématique	26
II - 3b) Valeurs numériques	29
II - 4. Calcul pratique des variations de température d'un barrage-voûte	32
II - 4a) Température de l'air	33
II - 4b) Température de l'eau	33
II - 4c) Bases des calculs. Températures extérieures sur les parements	34
II - 4d) Exemple de calcul des variations de température annuelles dans un arc de barrage-voûte	36
II - 5. Profondeur de pénétration du gel.	45

CHAPITRE III

Refroidissement naturel

III - 1.	Généralités	49
III - 2.	Refroidissement d'une paroi plane, indéfinie, plongée brusquement dans un milieu à température inférieure, constante	51
	III - 2a) Calcul analytique	51
	III - 2b) Calcul graphique par la méthode Schmidt	52
III - 3.	Refroidissement d'un cylindre infiniment long plongé brusquement dans un milieu à température inférieure, constante	54
III - 4.	Refroidissement d'une sphère plongée brusquement dans un milieu à température inférieure, constante	56
III - 5.	Evolution de la température moyenne des murs, cylindres et sphères	60
III - 6.	Evolution de la température moyenne de parallélépipèdes placés brusquement dans un milieu à température inférieure, constante	62
III - 7.	Refroidissement d'un mur placé dans un milieu dont la température varie sinusoidalement	64
III - 8.	Refroidissement d'un cylindre de longueur infinie placé dans un milieu dont la température varie sinusoidalement	69
III - 9.	Refroidissement de corps prismatiques de section quelconque. Cylindres équivalents	70
III - 10.	Refroidissement par les faces d'un mur pendant la période de dégagement interne de la chaleur de prise	76
III - 11.	Exemples de refroidissement naturel de murs et de cylindres en béton	79

CHAPITRE IV

Réfrigération artificielle du béton au moyen d'une circulation d'eau. Partie théorique

IV - 1.	Effet d'un tube de réfrigération unique dans une masse de béton infinie	85
	IV - 1a) Effet d'une émission (ou d'une absorption) continue de chaleur, le long d'une droite, dans une masse de béton infinie	85
	IV - 1b) Refroidissement d'une masse de béton infinie, au moyen d'un tube unique de rayon r_0 , maintenu constamment à 0°C par une circulation d'eau	88
IV - 2.	Effet d'un réseau de tubes disposés en « nid d'abeilles »	95
	IV - 2a) Température locale	95
	IV - 2b) Température moyenne du massif de béton	101

IV - 3.	Influence de la valeur du débit d'eau de réfrigération dans un réseau de tubes disposés en « nid d'abeilles »	103
	IV - 3a) Evolution de la température moyenne du béton	103
	IV - 3b) Calcul du débit d'eau nécessaire	105
IV - 4.	Influence du mode de disposition des tubes	111
	IV - 4a) Généralités	111
	IV - 4b) Méthode de calcul d'un réseau rectangulaire .	113
	IV - 4c) Résultats numériques	115
IV - 5.	Influence du dégagement de chaleur pendant la prise du béton	117
	IV - 5a) Généralités	117
	IV - 5b) Méthode de calcul	118
	IV - 5c) Résultats numériques	121
IV - 6.	Influence d'un arrêt de la circulation d'eau. Stabilisation des températures	123

CHAPITRE V

Réfrigération artificielle du béton

au moyen d'une circulation d'eau (suite). Partie pratique

V - 1.	Résumé des résultats théoriques et règles pratiques .	128
	V - 1a) Calcul de l'écartement des tubes ou de la durée de réfrigération	128
	V - 1b) Influence du débit d'eau de réfrigération . . .	132
	V - 1c) Influence du mode de disposition des tubes . .	133
	V - 1d) Influence du dégagement de chaleur de prise du ciment et de l'époque à laquelle débute la réfrigération	134
	V - 1e) Conclusions pratiques	137
V - 2.	Réalisation et exploitation d'un dispositif de réfrigération	138
	V - 2a) Ecartement des nappes de serpentins et des tubes d'une même nappe	138
	V - 2b) Longueur et diamètre des serpentins. Pertes de charge	139
	V - 2c) Matériel des serpentins. Joints	142
	V - 2d) Installation de distribution d'eau	144
	V - 2e) Pose et mise en service des serpentins	146
	V - 2f) Contrôle périodique des débits	148
	V - 2g) Contrôle des températures	149
V - 3.	Confrontation des températures calculées et des températures observées dans une installation existante . . .	150

NOTE ANNEXE

de M. CHARLES BLANC, professeur,

directeur de l'Institut de mathématiques appliquées

de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

Sur le refroidissement naturel du béton durant la phase d'échauffement initial	153
--	-----

SYMBOLES ET VALEURS DES COEFFICIENTS

Désignations	Unités	KORNFELD (a) 1936	
		Symb.	Valeur
Température	°C	θ	
Température moyenne dans l'espace, en un temps donné	°C		
Température moyenne dans le temps, en un point donné	°C		
Temps	heures	t	
Période	heures	t_0	
Pulsation	radians/h		
Déphasage	radians	φ	
Amplitude des variations de la température extérieure	°C	$\theta \max$	
Coefficient d'amortissement des ondes $\sqrt{\frac{\pi}{aT}}$	m^{-1}		
Coefficient d'amortissement de la fonction exponentielle			
Coefficient de conductibilité du béton	Cal/m h °C	λ	1,0
Coefficient de transmission au contact air-béton	Cal/m ² h °C	α	25
Chaleur spécifique du béton	Cal/kg °C	c	0,27
Poids spécifique du béton	kg/m ³	γ	2400
Diffusivité thermique	m ² /h	a	0,00154
Coefficient de dilatation du béton	°C ⁻¹		
Dégagement de chaleur interne instantané	Cal/m ³ h	ΔW	
Coefficient d'échauffement interne $\frac{w}{c\gamma}$	°C/h		
Epaisseur d'un mur	m		
Diamètre d'un cylindre ou d'une sphère	m		
Abscisse d'un point	m	x	
Distance relative d'un point			
Ecartement des tubes de réfrigération :			
en réseau hexagonal			
en réseau rectangulaire			
Débit d'eau de réfrigération : par serpentif	dm ³ /s		
par m ³ de béton	cm ³ /s.m ³		
Degré de réfrigération	jours ⁻¹		

- (a) H. KORNFELD : *Untersuchungen über die Temperaturverteilung*. Thèse. Schweizerische Verlags-Druckerei, Basel, 1936.
- (b) L. NISOLLE : *Régime de température et flux dans une paroi plane chauffée périodiquement*. « Chaleur et Industrie », n° 201, janvier 1937.
- (c) M. RITTER : *Oscillation de la température et contraintes thermiques dans les murs*. Association internationale des ponts et charpentiers. Extrait du 7^e volume des « Mémoires », Zurich, 1943/44.

SELON DIFFÉRENTS AUTEURS

NISOLLE (b) 1937		RITTER (c) 1943		STUCKY (d) 1946		HIRSCHFELD (e) 1948		STUCKY et DERRON 1957	
Symb.	Valeur	Symb.	Valeur	Symb.	Valeur	Symb.	Valeur	Symb.	Valeur
θ		θ		θ		θ		θ	
								$\bar{\theta}$	
								$\overline{\overline{\theta}}$	
t		t		t		t		t	
		T		T		T		T	
w						w		w	
α				Δ		β, E, γ		φ	
T		θ_{10}, θ_{20}		θ_0		θ_{Lmax}		A_0, A_L	
μ		k		μ				μ	
								$-p$	
λ		λ	1,0	k	1,5	λ	1,9	λ	2,0-2,2
h		α	10	α	12,5	α	12,0	α	15-40
c		c	0,21	c	0,25	c	0,27	c	0,22-0,23
γ		γ	2400	ρ	2400	γ	2300	γ	2400-2500
a		a	0,00198	a	0,0025	a	0,00306	a	0,0035-0,0040
		w		q		W		β	
								w	
								Γ	
2δ		d		e		d		L	
				D		$2r_a$		D	
x		z		x		x, r		x, r	
								ξ, ρ	
								e_H	
								e_R	
								Q	
								q	
								Ω	

(d) A. STUCKY : *Le barrage de la Dixence*. Bulletin technique de la Suisse romande, numéros des 16 février, 2 mars et 13 avril 1946.

(e) K. HIRSCHFELD : *Die Temperaturverteilung im Beton*. Springer-Verlag, Berlin, 1948.

INTRODUCTION

Chacun sait que le ciment, lorsqu'il fait prise et durcit, dégage de la chaleur. Ce phénomène, qui passe inaperçu lorsque l'on fabrique de petits objets en ciment ou en béton, reste sans conséquences dans les constructions usuelles, telles que les bâtiments et les ponts, parce que les éléments de ces ouvrages sont d'une épaisseur assez faible pour permettre à la chaleur d'hydratation de se dissiper au fur et à mesure de son développement. Il n'en est plus de même pour les grosses masses de béton, et l'on a observé depuis longtemps (Jogne 1920, Barberine 1922, Wäggital 1923, etc.) qu'à l'intérieur des grands barrages, la température peut monter de plusieurs dizaines de degrés et ne redescend que très lentement, quelquefois après plusieurs années seulement, pour osciller autour de la température moyenne annuelle de la région. On a attribué aux différences de température entre le centre de la masse et la surface, la cause de certaines fissures du béton et l'on a cherché par divers moyens à atténuer ces différences : joints de contraction des barrages-poids, brèches de clavage des barrages-voûtes, emploi de ciments spéciaux à faible chaleur d'hydratation. Le besoin s'est bientôt fait sentir de pouvoir estimer à l'avance l'évolution de l'état thermique d'un massif donné, par exemple pour fixer le programme des travaux et les dates de clavage des arcs d'un barrage-voûte. La construction de barrages de plus en plus grands, l'augmentation constante de la puissance des installations de bétonnage et par conséquent l'accroissement du volume de béton mis en œuvre quotidiennement ont augmenté les masses à refroidir dans une mesure telle que le refroidissement naturel devient d'une lenteur prohibitive. A l'instar

des Américains, on ne conçoit plus aujourd'hui de grand chantier sans une installation de réfrigération artificielle du béton : de l'eau froide circulant dans un réseau de serpentins noyés dans le béton enlève à la masse les calories dégagées par l'hydratation du ciment. Pour des raisons faciles à comprendre, le nombre et la grosseur des tuyaux de réfrigération ainsi que le débit d'eau froide doivent être choisis à l'avance de façon judicieuse, assurant une efficacité suffisante du système sans entraîner une dépense exagérée.

Enfin, les alternances de gel et dégel en haute montagne peuvent jouer un rôle néfaste sur un béton insuffisamment résistant à ce genre de sollicitations ; ce phénomène ne touche heureusement qu'une couche relativement peu profonde au voisinage de la surface, mais encore importe-t-il d'en évaluer l'épaisseur pour prendre à bon escient les mesures de protection nécessaires, telles que surdosage du béton de parement ou revêtement de pierre naturelle.

Ces quelques exemples, parmi les plus importants, expliquent pourquoi les constructeurs de barrages ont été amenés à étudier de plus en plus attentivement l'évolution thermique du béton, menant de front, parallèlement, les études théoriques et les recherches expérimentales destinées à fournir aux applications de la théorie la valeur des coefficients caractéristiques du béton : transmission de chaleur, diffusivité, chaleur spécifique, etc.

L'analyse mathématique des problèmes thermiques, telle qu'elle est exposée aux pages qui vont suivre, est le fruit d'une collaboration très précieuse avec l'Institut de mathématiques appliquées de l'École polytechnique de l'Université de Lausanne, particulièrement avec le directeur de cet institut, M. le professeur Charles Blanc, et son chef de travaux, M. Pierre Banderet, Dr ès sciences ; nous leur devons de nombreux conseils et la solution théorique de plusieurs problèmes soulevés par cette étude.

Chronologiquement se pose d'abord le problème du premier refroidissement du béton, puis celui de l'influence des variations de température extérieure en état de régime. Pour des raisons pratiques, nous traiterons ces questions dans l'ordre inverse, les solutions trouvées pour l'état de régime étant applicables en partie à l'état transitoire. Ainsi, après avoir rappelé dans un premier chapitre les équations générales des problèmes de thermique, nous

traiterons dans les chapitres suivants de l'influence des variations périodiques de la température extérieure, puis du refroidissement naturel et enfin de la réfrigération artificielle du béton.

Sans renoncer à tirer immédiatement certaines conclusions pratiques au cours du développement des calculs, nous grouperons les études théoriques au début de chaque chapitre, pour terminer par des indications plus directement utilitaires et des considérations nées des expériences faites sur les chantiers; la réfrigération artificielle soulève un tel nombre de questions que nous traiterons ce sujet en deux chapitres, l'un pour exposer les méthodes de calcul (chapitre IV), et l'autre pour donner les commentaires et les règles pratiques (chapitre V).

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA TRANSMISSION DE CHALEUR. COEFFICIENTS

I - I. TEMPÉRATURES A L'INTÉRIEUR D'UN MASSIF. ÉQUATION DE FOURIER

La transmission de la chaleur au sein d'un massif *sans émission de chaleur interne* obéit à l'équation générale de Fourier :

$$(I-1) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right)$$

où θ = température, en °C, en un point donné, à un instant donné ;

t = temps, en heures ;

x, y, z = coordonnées du point considéré, en mètres ;

a = coefficient de diffusivité de la matière = $\frac{\lambda}{c\gamma}$ (pour les bétons de barrages, on peut admettre actuellement $a = 0,003$ à $0,004$ m²/h) ;

λ = coefficient de conductibilité de la matière (en Cal/m.h.°C) ;

c = chaleur spécifique (en Cal/kg°C) ;

γ = poids spécifique (en kg/m³).

Cette équation classique, semblable à celle que l'on retrouve dans l'étude d'autres phénomènes de physique, est bien connue des mathématiciens, qui en ont donné la solution pour de nombreux cas, c'est-à-dire pour des corps de formes diverses : prismes, sphères, polyèdres, dont la surface est soumise à une variation de température donnée, brusque ou sinusoïdale, par exemple.

Lorsqu'il s'agit de résoudre un problème plan à symétrie centrale (cylindre dont toutes les sections sont dans un état thermique

identique, par exemple), il est avantageux de transformer l'équation (I-1) en coordonnées polaires ; elle devient alors :

$$(I-2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]$$

où r représente la distance du point considéré à l'origine, en mètres.

Dans le cas d'un problème spatial à symétrie centrale (sphère) l'équation devient :

$$(I-3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right].$$

Si le massif subit à la fois l'effet d'une température imposée à sa surface et un *dégagement de chaleur interne*, l'équation (I-1) doit être complétée et devient :

$$(I-4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega}{\lambda} \right] = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega}{c_V}$$

où : ω = dégagement de chaleur instantané, en Cal/m³ h, supposé uniforme dans toute la masse.

I - 2. INFLUENCE DES DIMENSIONS DU CORPS ET DE LA VALEUR DES COEFFICIENTS CARACTÉRISTIQUES DE LA MATIÈRE SUR L'ÉVOLUTION THERMIQUE

I - 2a) Corps sans dégagement de chaleur interne

L'équation (I-1) montre que la diffusivité a suffit à caractériser la *nature de la matière*. Cette équation permet de comparer entre eux des corps de forme semblable, mais de dimensions différentes, constitués ou non de la même matière.

a 1) CORPS GÉOMÉTRIQUEMENT SEMBLABLES, FORMÉS DE LA MÊME MATIÈRE

Ils ont un même coefficient de diffusivité ; à partir de conditions initiales identiques, l'état thermique de l'un des corps évoluera de façon identique à celui d'un autre corps semblable, mais à une allure différente ; les deux corps se trouveront dans le même état thermique

à des époques différentes. Si les longueurs sont dans le rapport $\frac{m_1}{m_2}$, les temps correspondants à un même état thermique seront dans le rapport

$$(I-5) \quad \frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2.$$

a 2) CORPS GÉOMÉTRIQUEMENT SEMBLABLES, FORMÉS DE MATIÈRES DIFFÉRENTES

Soit un premier corps formé d'une matière de diffusivité a_1 , et un second corps, semblable au premier, mais de diffusivité a_2 . Si les conditions initiales et au contour sont pareilles, ces deux corps passeront par des états thermiques identiques, mais à des âges différents, dans le rapport

$$(I-6) \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{a_2 m_1^2}{a_1 m_2^2}.$$

Ils passeront *en même temps* par le même état thermique si leurs dimensions sont dans le rapport

$$(I-7) \quad \frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}.$$

Ces relations permettent, comme les lois de similitude de l'hydraulique, par exemple, de comparer entre elles les observations faites sur des massifs de dimensions et de natures différentes, ou d'étudier l'évolution des températures d'un corps sur un modèle à échelle réduite.

I - 2b) Corps avec dégagement de chaleur interne

La diffusivité seule ne suffit plus à caractériser la matière, dont l'évolution thermique dépend aussi du « coefficient d'échauffement interne » $\Gamma = \frac{\omega}{c\gamma}$ (exprimé en °C/h) où ω , c , γ ont la signification indiquée au paragraphe précédent.

b 1) CORPS GÉOMÉTRIQUEMENT SEMBLABLES, FORMÉS DE LA MÊME MATIÈRE

Ils ne passeront par des états thermiques semblables que si le nombre ω de calories dégagées par unité de volume est à chaque instant inversement proportionnel au carré du rapport des dimensions des corps ; les durées nécessaires pour atteindre ces états thermiques semblables sont directement proportionnelles au carré des dimensions. Si

$$(I-8) \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \quad \left(\text{ici } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\right)$$

on retrouve, pour les temps correspondants :

$$(I-5) \quad \frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}.$$

Si la condition (I-8) n'est pas remplie, l'évolution thermique des corps considérés sera différente.

b 2) CORPS GÉOMÉTRIQUEMENT SEMBLABLES, FORMÉS DE MATIÈRES DIFFÉRENTES

Un premier corps formé d'une matière de diffusivité a_1 , et un second corps géométriquement semblable mais de diffusivité a_2 , ne passeront par les mêmes états thermiques que si leurs coefficients d'échauffement interne Γ satisfont à la condition

$$(I-9) \quad \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{a_1 m_2^2}{a_2 m_1^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m_2^2 \lambda_1}{m_1^2 \lambda_2};$$

les durées nécessaires pour atteindre ces états sont alors dans le rapport

$$(I-6) \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{a_2 m_1^2}{a_1 m_2^2}.$$

Ces corps passeront *en même temps* ($t_2 = t_1$) par des états semblables s'ils satisfont à la fois aux conditions

$$(I-7) \quad \frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \quad \text{et}$$

$$(I-10) \quad \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{a_1 \omega_1 \lambda_2}{a_2 \omega_2 \lambda_1} = 1$$

$$\text{ou} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a_2 \lambda_1}{a_1 \lambda_2} = \frac{c_1 \gamma_1}{c_2 \gamma_2}$$

I - 3. TEMPÉRATURE A LA SURFACE. « DIMENSIONS THERMIQUES » D'UN CORPS

Sur les faces d'un corps soumis aux variations de température du milieu ambiant, les températures θ_s de la surface du corps et θ_a de l'ambiance ne sont généralement pas égales. La transmission de chaleur au contact s'opère sous l'action d'une différence ($\theta_s - \theta_a$) proportionnelle au gradient de température mesuré dans le corps, au voisinage de la surface, en degrés par mètre :

$$(I-11) \quad \theta_s - \theta_a = \frac{\lambda}{\alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial n} \right)_{\text{surface}}$$

où θ_s = température à la surface du corps ;

θ_a = température extérieure, du milieu ambiant ;

n = normale à la surface ;

λ = coefficient de conductibilité de la matière du corps, en Cal/m h °C ;

α = coefficient de transmission au contact, dont la valeur dépend dans une large mesure des courants de convection, et, à un moindre degré, de la quantité de chaleur que le corps émet par rayonnement, en Cal/m² h °C.

On peut admettre, pour les murs d'une certaine épaisseur, que l'effet de cette discontinuité de la température à la surface du massif est le même que celui d'une surépaisseur de matière $\Delta L = \frac{\lambda}{\alpha}$ dont la surface extérieure serait alors à la température du milieu ambiant (*). L'épaisseur L_i d'un mur fictif équivalent à un mur réel d'épaisseur L peut être appelée « épaisseur thermique ».

(*) Cette simplification revient à confondre la courbe de répartition des températures avec une droite, dans la zone de la surépaisseur ΔL ; ceci est admissible lorsque l'épaisseur réelle L du mur est un multiple de la surépaisseur ΔL , comme dans les barrages ; ce ne serait plus le cas pour une paroi mince.

$$(I-12) \quad L_t = L + 2\Delta L = L + 2 \frac{\lambda}{\alpha}.$$

De même, le « diamètre thermique » d'un cylindre sera

$$(I-12') \quad D_t = D + 2 \frac{\lambda}{\alpha}.$$

I - 4. VALEURS NUMÉRIQUES DES COEFFICIENTS CARACTÉRISTIQUES DU BÉTON

Dans les équations générales (I-1) à (I-4) interviennent différentes constantes caractérisant les propriétés thermiques de la matière. Ce sont :

la diffusivité $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$ en m^2/h

qui est elle-même une combinaison de trois coefficients :

la conductibilité	λ	en $Cal/m \text{ h } ^\circ C$
la chaleur spécifique	c	en $Cal/kg \text{ } ^\circ C$
le poids spécifique	γ	kg/m^3 .

La température à la surface dépend, en outre, du coefficient de transmission au contact α $Cal/m^2 \text{ h } ^\circ C$.

Pour calculer l'évolution thermique d'un corps, il importe tout d'abord de connaître ces constantes. Lorsqu'il s'agit de béton, les valeurs indiquées par divers auteurs diffèrent notablement. Ainsi, par exemple, la diffusivité, qui résume trois de ces coefficients et suffit dans la plupart des problèmes à caractériser la matière, varie de $0,00154 \text{ m}^2/h$ selon les indications de Kornfeld ⁽¹⁾, à $0,0056 \text{ m}^2/h$ d'après les observations du barrage de Seminole (E-U).

Les mesures de température faites sur le premier barrage de la Dixence ont montré une très bonne concordance avec les résultats des calculs exécutés pour cet ouvrage sur la base d'un coefficient de diffusivité $a = 0,0025 \text{ m}^2/h$. ⁽²⁾

⁽¹⁾ KORNFIELD : *Untersuchungen über die Temperaturverteilung*. Thèse. Schweizerische Verlags-Druckerei, Basel, 1936.

⁽²⁾ Voir A. STUCKY : *Le barrage de la Dixence*. Bulletin technique de la Suisse romande des 16 février, 2 mars et 13 avril 1946.

Le facteur le plus important de cette variation est certainement la *conductibilité* λ , dont la valeur, pour le béton, semble évoluer de pair avec les techniques de fabrication, de mise en place et de conservation du béton; nous trouvons, en effet :

d'après la « Hütte », édition 1919.	$\lambda = 0,65$ à $0,70$	$\frac{\text{Cal}}{\text{m h } ^\circ\text{C}}$
d'après Kornfeld (1936) ⁽¹⁾ et Ritter (1943) ⁽²⁾	$\lambda = 1,0$	
d'après les essais exécutés au laboratoire de géotechnique de l'École polytech- nique de Lausanne, en 1937	$\lambda = 1,3$ à $1,7$	
d'après Hirschfeld ⁽⁴⁾ (1948)	$\lambda = 1,9$	
d'après les essais exécutés au laboratoire de physique technique de l'École polytechnique de Lausanne, en 1952	$\lambda = 2,0$ à $2,7$	
d'après Schleicher ⁽⁵⁾ , édition 1955		
pour des plaques } sèches	$\lambda = 0,6$ à $1,0$	
de 0,10 m d'épaisseur } humides	$\lambda = 1,0$ à $2,0$	
pour des dalles épaisses, max.	$\lambda = 2,05$	

Comme toutes les mesures calorimétriques, celle de la conductibilité est délicate et les résultats peuvent varier un peu selon la méthode expérimentale appliquée, mais il paraît certain que la cause essentielle de ces différences provient de la composition même du béton. La conductibilité des agrégats, qui constituent, en volume et en poids, la composante la plus importante du béton, dépend de la nature de la pierre; elle vaut ⁽⁶⁾ :

pour le calcaire	0,8 Cal/m h °C
pour le grès.	1,4 Cal/m h °C
pour le gneiss et le granit	2,9 Cal/m h °C

⁽¹⁾ *Loc. cit.* (voir page 10).

⁽²⁾ RITTER : *Oscillation de la température et contraintes thermiques dans les murs*. Association internationale des ponts et charpentes. Extrait du 7^e volume des « Mémoires », Zurich, 1943-1944, p. 297.

⁽⁴⁾ HIRSCHFELD : *Die Temperaturverteilung im Beton*. Springer-Verlag, Berlin, 1948.

⁽⁵⁾ SCHLEICHER : *Taschenbuch für Bauingenieure*. Springer-Verlag, Berlin, 1955, page 440.

⁽⁶⁾ Selon KÜDERLI : *Manuel I*, Bâle, 1949.

D'autre part, plus la matière est poreuse, plus sa conductibilité est faible, et vice versa. Il est donc logique que les bétons vibrés, très compacts, que l'on fabrique maintenant, aient une conductibilité plus élevée que celle des bétons coulés ou damés fabriqués autrefois. Ceci expliquerait en partie que les valeurs mesurées aujourd'hui en laboratoire dépassent celles que donne la littérature antérieure. Il semblerait toutefois, d'après l'observation des températures de barrages en construction à l'heure actuelle, que la conductibilité des bétons de chantier soit un peu plus faible que celle des échantillons de même composition fabriqués en laboratoire. Ceci paraît naturel et l'on pourra admettre raisonnablement pour le béton de chantier une conductibilité de 10 à 15 % inférieure à la valeur trouvée au laboratoire.

Le coefficient de transmission au contact α dépend à la fois de la transmission de chaleur par convection α_c et du rayonnement α_r émis par le corps.

On sait que les échanges de chaleur entre un solide et un fluide dépendent fortement de la vitesse ν des courants du fluide au voisinage de la surface du solide. Le coefficient de convection α_c entre l'air et une paroi rugueuse s'exprime, d'après Juerges, par les formules (4)

$$\alpha_c = 5,3 + 3,6 \nu \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C} \quad \text{pour } \nu \leq 5 \text{ m/s}$$

$$\alpha_c = 6,47 \nu^{0,78} \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C} \quad \text{pour } \nu > 5 \text{ m/s}$$

D'après les observations météorologiques, la vitesse moyenne mensuelle du vent varie de 1,3 à 8 m/s selon les endroits. Si l'on veut calculer avec sécurité le refroidissement naturel d'un massif de béton, on admettra une faible vitesse du vent, par exemple 1,5 m/s, conduisant à un coefficient de convection plutôt bas

$$\alpha_c = 10,7 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$$

Pour un vent de 5 m/s, on trouverait $\alpha_c = 23,3 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$
et pour un vent de 10 m/s, on trouverait $\alpha_c = 39 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$

Outre la convection, le corps transmet une partie de sa chaleur au milieu ambiant par rayonnement ; la loi qui régit cet échange est en principe assez complexe ; le coefficient de rayonnement

(4) Formules que l'on trouve, entre autres, à la page 33 de l'ouvrage de KORN-FELD, *loc. cit.* (voir page 10).

dépend non seulement de la nature des corps considérés, mais il est proportionnel à la différence des quatrièmes puissances des températures superficielles absolues du corps émetteur et du récepteur. En fait, dans le cas d'un barrage, la température absolue des parements varie dans des limites relativement étroites (par exemple 260° et 300° K) de sorte que l'on peut admettre une valeur constante, d'environ

$$\alpha_r = 4,0 \text{ à } 4,6 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$$

pour le coefficient de rayonnement d'un corps gris, relativement rugueux, comme le béton. Il suffit de connaître l'ordre de grandeur de ce coefficient, puisqu'on doit l'additionner au coefficient de convection, qui est plus grand et lui-même souvent très imprécis. On verra d'ailleurs plus loin que, pour les barrages, le coefficient global $\alpha = \alpha_c + \alpha_r$ ne joue pas un rôle très important.

Au total, le coefficient de transmission au contact air-béton peut donc varier de

$$\alpha = 15 \text{ à } \alpha = 40 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$$

On choisira une valeur faible s'il s'agit d'étudier un phénomène où il joue un rôle favorable (par exemple, dans le refroidissement naturel d'un massif) et une valeur élevée dans le cas contraire (par exemple, dans l'étude de l'effet du gel au voisinage d'un parement).

Du côté de l'air, on ajoutera donc aux dimensions réelles du corps une *surépaisseur thermique* $\Delta L = \frac{\lambda}{\alpha}$ variant entre

$\Delta L = 0,17 \text{ m}$ pour $\lambda = 2,5 \text{ Cal/m h } ^\circ\text{C}$ et $\alpha = 15 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$
 et $\Delta L = 0,04 \text{ m}$ pour $\lambda = 1,5 \text{ Cal/m h } ^\circ\text{C}$ et $\alpha = 40 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$.

Par rapport aux dimensions des massifs de béton constituant les barrages, cette surépaisseur thermique est généralement peu importante; elle l'est d'autant moins que la masse du corps est plus grande par rapport à sa surface.

Sur une face en contact avec un liquide, le coefficient de transmission α est de l'ordre de 2000 à 4000 Cal/m² h °C. La surépaisseur thermique tombe à 1 mm et moins; elle est alors tout à fait négligeable.

Sur les surfaces en contact avec l'eau du lac, on peut donc admettre que le béton a la même température que l'eau.

CHAPITRE II

TEMPÉRATURES A L'INTÉRIEUR DE CORPS DONT LES FACES SUBISSENT DES VARIATIONS DE TEMPÉRATURE SINUSOÏDALES EN ÉTAT DE RÉGIME

II - 1. GÉNÉRALITÉS

Chronologiquement, le premier problème thermique qui se présente au constructeur de barrages est celui du refroidissement, naturel ou artificiel, du béton dont la température interne s'est élevée notablement au-dessus de celle du milieu ambiant sous l'effet de la prise du ciment. Après cette phase de refroidissement, la température du béton n'est en général plus influencée que par celle du milieu ambiant, air ou eau, qui le plus souvent varie de façon périodique. Pour des raisons pratiques, nous examinerons d'abord l'influence des variations de température périodiques, que nous supposerons sinusoïdales, en état de régime, et n'aborderons qu'ensuite l'étude du premier refroidissement. Quand il s'agira du refroidissement de corps placés dans un milieu dont la température varie sinusoïdalement, nous pourrons ainsi faire usage des solutions trouvées en état de régime.

II - 2. TEMPÉRATURES A L'INTÉRIEUR D'UN MUR PLAN D'ÉPAISSEUR L ET DE SURFACE INFINIE, DONT LES FACES SUBISSENT UNE VARIATION DE TEMPÉRATURE SINUSOÏDALE, EN ÉTAT DE RÉGIME

II - 2a) Température en un point, à un instant quelconque

Supposons, ce qui sera pratiquement toujours le cas pour des barrages, que les températures des faces du mur oscillent en phase,

mais autour de valeurs moyennes $\overline{\theta}_0$ et $\overline{\theta}_L$ (*) éventuellement différentes, et avec des amplitudes A_0 et A_L différentes aussi. A tout instant t , les températures des faces seront ainsi :

sur l'un des parements (celui par rapport auquel se mesurent les distances des points du mur) $\theta_0 = \overline{\theta}_0 + A_0 \cos \omega t$
 sur l'autre parement $\theta_L = \overline{\theta}_L + A_L \cos \omega t$

La solution de l'équation générale (I-1), donnée par le professeur Ritter (3) pour le calcul des températures intérieures dans le cas où les températures extérieures oscillent autour d'une même moyenne, se laisse facilement étendre au cas où ces moyennes sont différentes. La température θ en un point quelconque à distance x du parement origine (**) est donnée à chaque instant t par la formule :

$$(II-1) \quad \theta = f \cos \omega t + \psi \sin \omega t + C_1 + C_2 x$$

où f et ψ sont des fonctions d' x seulement :

$$(II-2) \quad \begin{cases} f = A \cos \mu x \operatorname{Ch} \mu x + B \cos \mu x \operatorname{Sh} \mu x + C \sin \mu x \operatorname{Ch} \mu x + D \sin \mu x \operatorname{Sh} \mu x \\ \psi = -A \sin \mu x \operatorname{Sh} \mu x - B \sin \mu x \operatorname{Ch} \mu x + C \cos \mu x \operatorname{Sh} \mu x + D \cos \mu x \operatorname{Ch} \mu x \end{cases}$$

où

$$(II-3) \quad \mu = \sqrt{\frac{\pi}{aT}}$$

a est le coefficient de diffusivité en m^2/h ,
 T est la période des oscillations de la température extérieure, en heures.

(*) Nous désignons par un symbole surmonté d'un double trait une valeur moyenne dans le temps en un point donné, tandis qu'un symbole surmonté d'un simple trait représente une moyenne spatiale, à un instant donné.

(**) Pour des raisons pratiques, en particulier pour utiliser les abaques donnés plus loin, il est indiqué de choisir comme parement origine celui sur lequel l'amplitude des variations est la plus grande. Dans le cas des barrages, c'est généralement le parement aval, les variations de température de l'air étant plus fortes que celles de l'eau.

(3) RITTER, *loc. cit.* (voir page 11).

Ainsi, dans le cas de variations annuelles et pour $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$,

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{0,004 \times 8760}} = 0,2994 \cong 0,3 \text{ m}^{-1}$$

A , B , C et D sont des constantes d'intégration, déterminées dans chaque cas particulier par les conditions aux limites. D'une façon générale, on a aux limites :

$$1^\circ \text{ pour } x = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad f = A \quad \text{et} \quad \psi = D$$

$$\theta = A \cos \omega t + D \sin \omega t + C_1 \equiv A_0 \cos \omega t + \bar{\theta}_0 = \theta_0$$

$$\text{d'où} \quad A = A_0, \quad D = 0, \quad C_1 = \bar{\theta}_0$$

$$2^\circ \text{ pour } x = L, \quad \theta = \theta_L, \quad f = f(\mu L) \quad \text{et} \quad \psi = \psi(\mu L)$$

$$\theta = f(\mu L) \cos \omega t + \psi(\mu L) \sin \omega t + \bar{\theta}_0 + C_2 L \equiv A_L \cos \omega t + \bar{\theta}_L$$

$$\text{d'où} \quad f(\mu L) = A_L, \quad \psi(\mu L) = 0, \quad C_2 = \frac{\bar{\theta}_L - \bar{\theta}_0}{L}$$

$$f(\mu L) = A_L = A_0 \cos \mu L \text{ Ch } \mu L + B \cos \mu L \text{ Sh } \mu L + C \sin \mu L \text{ Ch } \mu L$$

$$\psi(\mu L) = 0 = -A_0 \sin \mu L \text{ Sh } \mu L - B \sin \mu L \text{ Ch } \mu L + C \cos \mu L \text{ Sh } \mu L$$

Après avoir tiré B et C de ces deux équations et posé, pour simplifier l'écriture :

$$n = \frac{A_L}{A_0} = \text{rapport des amplitudes sur les faces,}$$

$$B^* = \frac{B}{A_0}, \quad C^* = \frac{C}{A_0}, \quad \text{on obtient :}$$

$$(II-4) \quad \begin{cases} B^* = \text{Sh } \mu L \frac{n \cos \mu L - \text{Ch } \mu L}{\text{Ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L} \\ C^* = \sin \mu L \frac{n \text{Ch } \mu L - \cos \mu L}{\text{Ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L} \end{cases}$$

Toutes les constantes à introduire dans l'équation (II-1) sont ainsi déterminées et les équations (II-2) prennent la forme

$$(II-2') \quad \begin{cases} f = A_0 (\cos \mu x \text{ Ch } \mu x + B^* \cos \mu x \text{ Sh } \mu x + C^* \sin \mu x \text{ Ch } \mu x) \\ \psi = A_0 (-\sin \mu x \text{ Sh } \mu x - B^* \sin \mu x \text{ Ch } \mu x + C^* \cos \mu x \text{ Sh } \mu x) \end{cases}$$

Il est facile de voir que la température en un point donné, c'est-à-dire pour une valeur constante de x , est encore une fonction sinusoïdale du temps de même période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ que sur les faces, mais déphasée ; en effet, l'équation (II-1) peut se mettre sous la forme :

$$(II-5) \quad \theta = \sqrt{f^2 + \psi^2} \cos\left(\omega t - \text{arc tg } \frac{\psi}{f}\right) + \bar{\theta}_0 + \frac{\bar{\theta}_L - \bar{\theta}_0}{L} x.$$

L'amplitude des oscillations au point considéré vaut donc :

$$(II-6) \quad A(x)_{\max} = \sqrt{f^2 + \psi^2}$$

tandis que le déphasage, c'est-à-dire le retard de l'oscillation au point considéré par rapport à l'oscillation sur les parements est représenté par

$$(II-7) \quad \varphi = \text{arc tg } \frac{\psi}{f}.$$

Sur l'axe du mur, c'est-à-dire pour $x = \frac{L}{2}$, cette formule devient

$$(II-8) \quad A(\text{axe})_{\max} = \frac{n+1}{2} A_0 \sqrt{\frac{2}{\text{Ch } \mu L + \cos \mu L}}.$$

L'amplitude des variations de température au milieu du mur est représentée sur le graphique II-1. Les variations annuelles s'atténuent rapidement dès que l'épaisseur dépasse quelques mètres ; elles tombent à 10 % des variations extérieures pour une épaisseur de 20 mètres et à 1 % pour 35 mètres lorsque les températures des deux parements varient simultanément ($n = 1$) ; elles sont encore réduites de moitié si la température de l'un des parements reste constante ($n = 0$). Enfin, les variations journalières s'atténuent encore beaucoup plus rapidement ; elles ne sont plus que de 1 % au milieu d'un mur de 1,80 m d'épaisseur.

Dans le cas où les amplitudes des oscillations extérieures sont égales sur les deux parements, $n = 1$, l'amplitude maximum à l'intérieur du mur, à distance x du parement origine, peut s'écrire aussi

$$(II-6') \quad A(x)_{\max} = A_0 \sqrt{\frac{\text{Ch } \mu(L-2x) + \cos \mu(L-2x)}{\text{Ch } \mu L + \cos \mu L}} \quad (*)$$

La figure II-2 montre l'amplitude et le déphasage des oscillations en fonction de la distance relative entre le point considéré et le parement, pour des murs de différentes épaisseurs dont les parements subissent des variations de température sinusoïdales identiques, de période égale à une année ou à un jour.

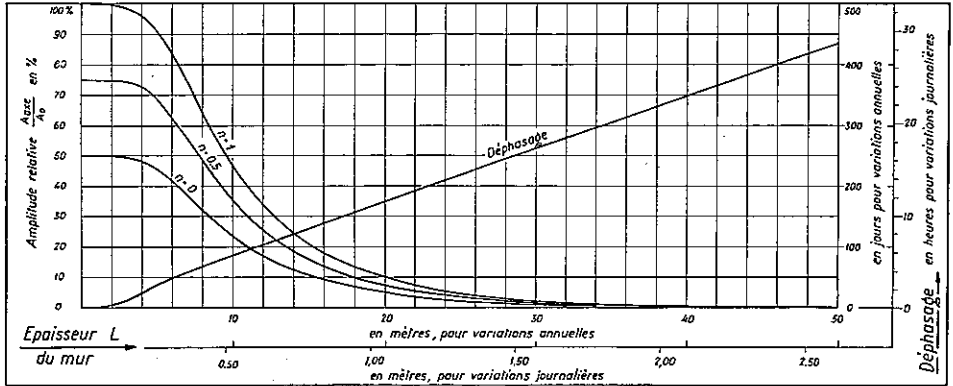


FIG. II-1. — Amplitude et déphasage des variations de température sur l'axe d'un mur en fonction de l'épaisseur, lorsque les parements subissent des variations de température sinusoïdales en phase. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

La figure II-3 donne ces mêmes grandeurs pour un mur d'épaisseur infinie. Dans ce cas, la formule (II-6) donnant l'amplitude des variations en un point quelconque devient simplement

$$(II-6'') \quad A(x)_{\max} = A_0 e^{-\mu x}$$

(*) Contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire de prime abord, en comparant les formules (II-8) et (II-6'), il ne suffit pas, pour passer au cas général d'une amplitude différente sur les deux parements, de multiplier le second membre de l'équation (II-6') par $\frac{n+1}{2}$. En effet, dans le cas d'un mur très épais, par exemple, les variations à l'intérieur du mur, à faible distance d'un parement, ne sont influencées que d'une façon insignifiante par les oscillations sur l'autre parement, et ne dépendent pratiquement pas, par conséquent, de la valeur du rapport n . Il faut alors revenir à la formule (II-6).

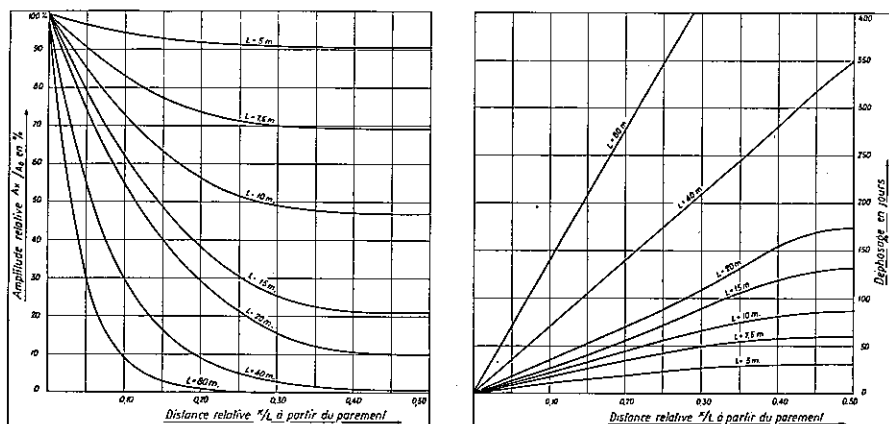


FIG. II-2. — Amplitude relative et déphasage des variations de température locales

à l'intérieur de murs dont les parements subissent des variations annuelles sinusoïdales identiques d'amplitude A_0 . Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

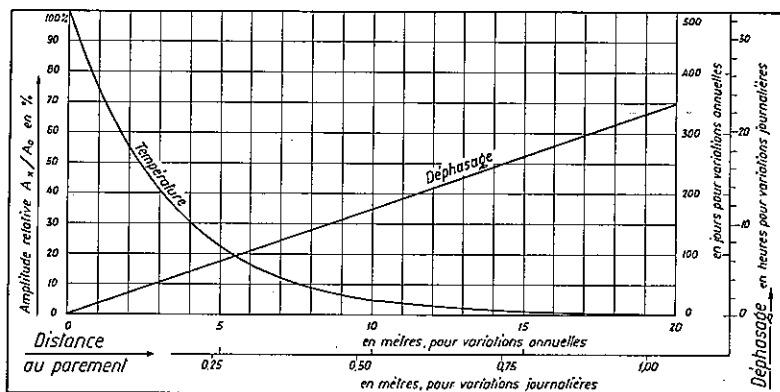


FIG. II-3. — Amplitude relative et déphasage des variations de température à différentes profondeurs d'un mur d'épaisseur infinie, dont le parement subit une variation sinusoïdale d'amplitude A_0 . Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

tandis que la formule (II-7) du déphasage devient

$$(II-7') \quad \varphi = \mu x.$$

Les lois de similitude énoncées au chapitre premier permettent d'appliquer ces mêmes graphiques aux cas où la période est différente

d'une année (par exemple un jour) et la paroi formée de matériaux de conductibilité λ différente : les épaisseurs doivent être prises en raison directe de la racine carrée des temps et de la racine carrée du coefficient de diffusivité $a = \frac{\lambda}{c\gamma}$.

Ainsi, par exemple, dans un mur d'épaisseur infinie, les variations de température annuelles du parement ne se feront sentir qu'avec une amplitude réduite à 10 % à 7,67 m du parement ; d'après les lois de similitude, les longueurs étant proportionnelles à la racine carrée des temps, les variations journalières auront déjà subi la même réduction à 10 % à une profondeur de 7,67 m $\sqrt{\frac{1}{365}} = 0,40$ m seulement.

Connaissant l'amplitude et le déphasage des variations de température en un point du mur, il est facile de dessiner la sinusoïde représentant ces variations au cours du temps. C'est ainsi, à partir des valeurs mesurées sur le graphique II-2, que l'on a construit la figure II-4, sur laquelle on remarque bien l'amortissement et le déphasage des oscillations à différentes profondeurs d'un mur symétrique de 20 mètres d'épaisseur.

De même, des sections de la figure II-4 pour différentes valeurs du temps ont permis de tracer la figure II-5 montrant la courbe de répartition des températures dans le même mur, aux époques correspondantes. Le sens du passage du flux calorifique ressort immédiatement du dessin, la chaleur passant toujours des régions les plus chaudes aux régions les plus froides.

II - 2b) Température moyenne et température fictive sur les parements

La connaissance de la température locale, en un point donné à l'intérieur du béton peut être nécessaire, par exemple, pour interpréter les résultats d'observations faites sur un ouvrage, telles que des mesures de déformations internes au moyen de sondes électriques. Le problème se pose différemment lors de l'étude d'un projet : ce ne sont généralement pas les températures locales que l'on désire connaître, mais les déformations d'ensemble dues aux

variations de température. Pour calculer les forces hyperstatiques résultant des liaisons extérieures d'un barrage-voûte, par exemple, il faut connaître la variation de longueur moyenne des arcs et la rotation relative des sections extrêmes. Ces déformations sont identiques à celles qu'engendrerait une répartition linéaire des températures entre les deux parements, à condition que les deux diagrammes de répartition, linéaire et réel, aient la même aire et que leurs centres de gravité soient à même distance de l'axe de la pièce. (Cela revient à identifier les allongements et les rotations aux déformations qu'engendreraient un effort normal fictif et un moment fléchissant fictif.)

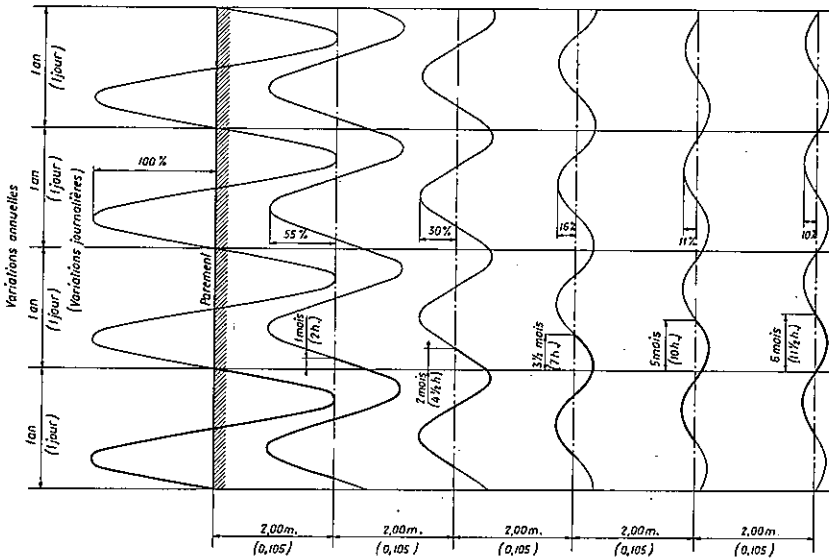


FIG. II-4. — Variations de température à différentes profondeurs d'un mur symétrique de 20 m d'épaisseur.

Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Les cotes sans parenthèses correspondent aux variations annuelles pour un mur de 20 m d'épaisseur ; les cotes entre parenthèses correspondent aux variations journalières pour un mur de 1,05 m d'épaisseur.

Variation de la température
du parement dans le temps

Température dans le mur
à des instants donnés

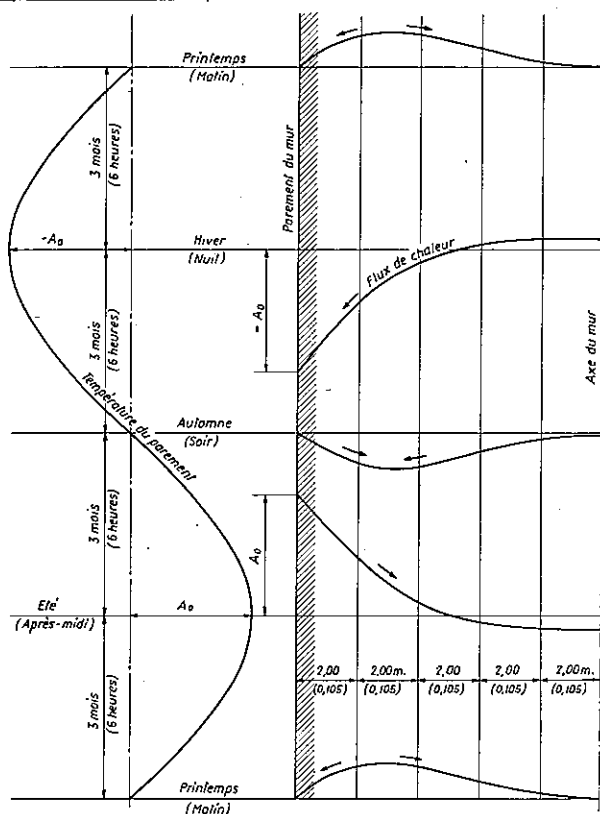


FIG. II-5. — Variations de température à différentes profondeurs d'un mur symétrique de 20 m d'épaisseur.

Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Les cotes sans parenthèses correspondent aux variations pour un mur de 20 m d'épaisseur ; les cotes entre parenthèses correspondent aux variations journalières pour un mur de 1,05 m d'épaisseur.

Connaissant les variations de température réelles, sinusoïdales, sur les parements, il s'agit donc de déterminer l'ordonnée moyenne $\bar{\theta}$ du diagramme linéaire (fig. II-6 et II-7) et la pente de cette droite ou, ce qui revient au même, les ordonnées θ'_0 et θ'_L des températures fictives sur les parements.

Enfin, ces grandeurs variant dans le temps, on désire spécialement connaître leurs valeurs extrêmes.

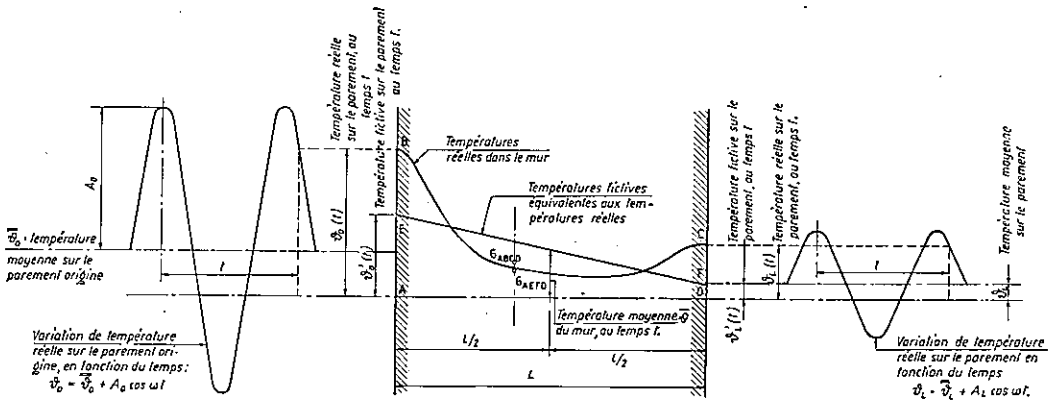


FIG. II-6. — Définition des températures réelles et fictives sur les parements et à l'intérieur d'un mur dont les faces subissent des variations de température sinusoïdales.

La température moyenne est donnée par l'expression

$$(II-9) \quad \bar{\theta} = \frac{\int \theta dx}{L} = \frac{1}{L} \left[\int_0^L (f \cos \omega t) dx + \int_0^L (\psi \sin \omega t) dx + \int_0^L (C_1 + C_2 x) dx \right].$$

C'est encore une sinusoïde en fonction de t . Sa valeur maximum s'obtient par annulation de la dérivée par rapport à t .

$$(II-10) \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\omega}{L} \left[-\sin \omega t \int_0^L f dx + \cos \omega t \int_0^L \psi dx \right]$$

qui devient égale à zéro au temps t_1 pour lequel

$$(II-11) \quad \omega t_1 = \text{arc tg} \frac{\int \psi dx}{\int f dx} = \text{arc tg} \frac{\text{Sh } \mu L - \sin \mu L}{\text{Sh } \mu L + \sin \mu L}.$$

Il vient ainsi

$$(II-12) \quad \bar{\theta}_{\max} = \frac{1}{L} \left[\sqrt{(\int f dx)^2 + (\int \psi dx)^2} \right] + \frac{\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_L}{2}.$$

Les valeurs des intégrales $\int f dx$ et $\int \psi dx$ ont été données par Ritter (3)

$$(II-13) \quad \begin{cases} \int f dx = A_0 \frac{1+n}{2\mu} \frac{\text{Sh } \mu L + \sin \mu L}{\text{Ch } \mu L + \cos \mu L} \\ \int \psi dx = A_0 \frac{1+n}{2\mu} \frac{\text{Sh } \mu L - \sin \mu L}{\text{Ch } \mu L + \cos \mu L} \end{cases}$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression précédente (II-12), on a

$$(II-14) \quad \bar{\theta}_{\max} = A_0 \frac{1+n}{2\mu L} \sqrt{\frac{2(\text{Ch } \mu L - \cos \mu L)}{\text{Ch } \mu L + \cos \mu L}} + \frac{\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_L}{2}.$$

Rappelons que
$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{aT}} \quad (II-3)$$

où a = coefficient de diffusivité
 T = période des oscillations.

La température sur les parements passe par un maximum au temps $t = 0$; la température moyenne passe par un maximum au temps t_1 . L'expression (II-11) représente donc le retard, ou déphasage, de la température moyenne par rapport à celle des parements.

La *différence de température* fictive ($\theta'_0 - \theta'_L$) entre les parements (*) est donnée par la condition d'égalité des moments statiques des

(3) RITTER, *loc. cit.* (voir page 11).

(*) Nous exprimons la différence dans le sens : température à l'origine θ'_0 moins température à l'extrémité θ'_L , et non pas dans le sens opposé $\theta'_L - \theta'_0$, comme le voudrait l'usage courant. Il y a une raison à cela : nous avons choisi comme parement origine celui où l'amplitude des oscillations est la plus forte, et rapporté, dans les abaques, toutes les températures, locales ou autres, à

aires des deux diagrammes, θ (température réelle) et θ' (température fictive, linéaire), par rapport à un axe quelconque. Il est commode de choisir comme axe de référence le milieu du mur ; si l'on appelle u la distance d'un point à cet axe

$$(II-15) \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \theta u \, du = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \theta' u \, du = \theta'_L \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} u \, du + \frac{(\theta'_0 - \theta'_L)}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \left(\frac{L}{2} - u\right) u \, du.$$

Il est évident que $\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} u \, du = 0$. Donc

$$(II-15') \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \theta u \, du = -\frac{\theta'_0 - \theta'_L}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} u^2 \, du = -(\theta'_0 - \theta'_L) \frac{L^2}{12}$$

$$(II-16) \quad \theta'_0 - \theta'_L = -\frac{12}{L^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \theta u \, du =$$

$$-\frac{12}{L^2} \left\{ \cos \omega t \int f u \, du + \sin \omega t \int \psi u \, du + \int \left[C_1 + C_2 \left(\frac{L}{2} + u \right) \right] u \, du \right\}.$$

Cette différence varie aussi de façon sinusoidale ; elle atteint sa valeur maximum au temps t_2 pour lequel

$$(II-17) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\theta'_0 - \theta'_L) = -\frac{12\omega}{L^2} \left[-\sin \omega t \int f u \, du + \cos \omega t \int \psi u \, du \right] = 0$$

d'où

$$(II-18) \quad \omega t_2 = \text{arc tg} \frac{\int \psi u \, du}{\int f u \, du}.$$

cette amplitude à l'origine, seule valeur de comparaison logique dans le cas d'un mur d'épaisseur infinie. Or, si les températures des deux parements oscillent autour d'une même moyenne, la plus grande différence de température est positive dans le sens origine-extrémité (voir fig. II-7).

En remplaçant cette valeur dans (II-16), on trouve

$$(II-19) \quad (\theta'_0 - \theta'_L)_{\min}^{\max} = \pm \frac{12}{L^2} \sqrt{(\int f u du)^2 + (\int \psi u du)^2} + (\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_L)$$

où

$$(II-20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} f u du = A_0 \frac{1-n}{4\mu} L \frac{\text{Sh } \mu L - \sin \mu L}{\text{Ch } \mu L - \cos \mu L} \\ \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \psi u du = A_0 \frac{1-n}{4\mu} L \left(\frac{\text{Sh } \mu L + \sin \mu L}{\text{Ch } \mu L - \cos \mu L} - \frac{2}{\mu L} \right) \end{array} \right.$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (II-18), on trouve pour le déphasage de la sinusoïde représentative de la différence des températures fictives sur les parements

$$(II-18') \quad \omega t_2 = \text{arc tg } \frac{\mu L (\text{Sh } \mu L + \sin \mu L) - 2 (\text{Ch } \mu L - \cos \mu L)}{\mu L (\text{Sh } \mu L - \sin \mu L)}$$

La figure II-7 représente l'amplitude et le déphasage des variations de la température moyenne $\bar{\theta}$ et de la différence maximum D' des températures fictives (diagramme linéaire) entre les parements, en fonction de l'épaisseur du mur, dans le cas où les températures extérieures oscillent autour d'une même valeur moyenne.

Si les températures moyennes des parements sont différentes, il suffit de superposer cette différence aux valeurs du graphique, comme cela ressort de la formule (II-19).

On trouvera un exemple concret de ce calcul au paragraphe II-4 d), page 36.

II - 3. EFFET DE L'INSOLATION

II - 3a) Etude mathématique

Soit un mur en contact avec un milieu ambiant, par exemple l'air, à température variable θ_a , et soumis aux radiations S provenant

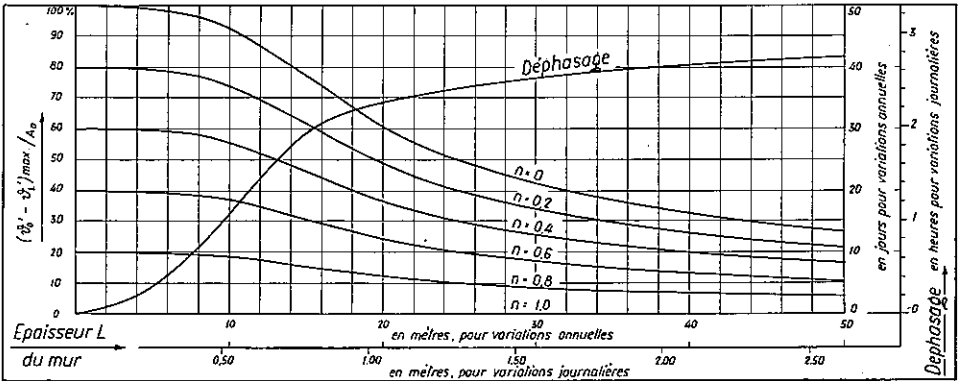
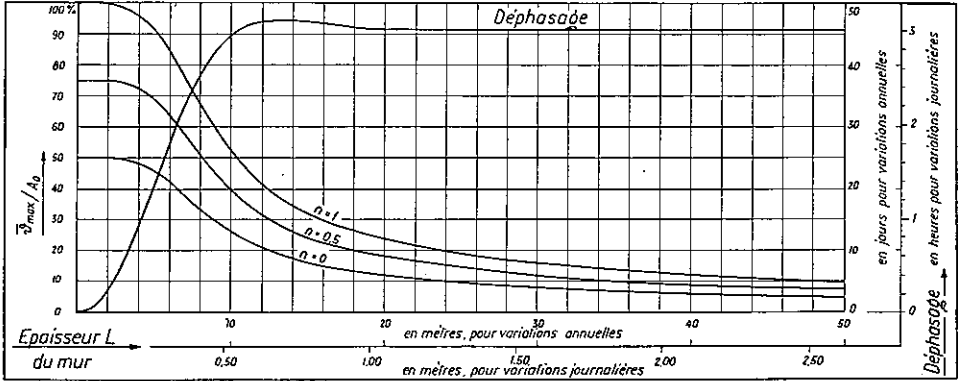
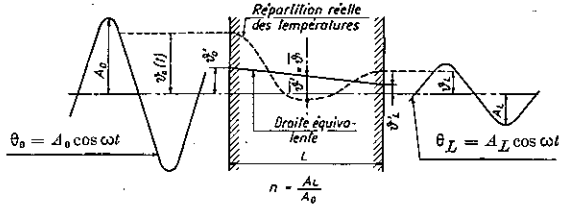


FIG. II-7. — Amplitude relative et déphasage de la température moyenne et de la différence de température fictive entre les parements d'un mur dont les faces subissent des variations de température sinusoïdales en phase autour d'une même valeur moyenne. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

de l'insolation (fig. II-8). La température intérieure du mur, $\theta_{(x,t)}$, varie en fonction du temps et de la position du point considéré.

La température θ_s à la surface du parement diffère de θ_a pour deux raisons :

- le parement s'échauffe sous l'effet de l'insolation, une fraction R de la chaleur reçue par rayonnement étant absorbée par le mur, tandis qu'une partie $(S-R)$ est réfléchiée immédiatement ;

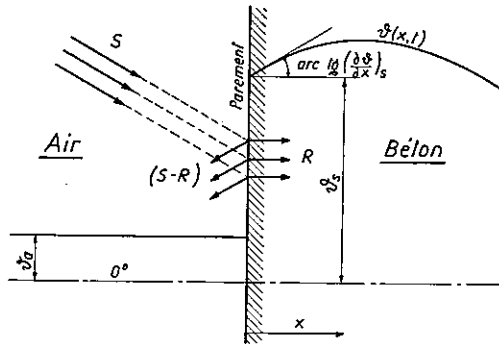


FIG. II-8. — Insolation. Températures et radiations sur le parement d'un mur.

les échanges de chaleur par convection, entre le parement du mur et le milieu ambiant ne peuvent se faire qu'en présence d'une différence de température ; ils sont proportionnels à cette différence.

Une partie $(S-R)$ de la chaleur S déposée à la surface par le rayonnement est donc réfléchiée immédiatement ; le reste, R , se partage en deux parts, dont l'une se transmet à son tour au milieu ambiant, principalement par convection, du fait que la température de la surface du mur est supérieure à celle de l'air ; la dernière part seule se transmet à l'intérieur du mur par conductibilité. Le partage se traduit par la relation

$$(II-21) \quad R = \alpha (\theta_s - \theta_a) - \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_s$$

- où R = quantité de chaleur déposée par rayonnement et non réfléchiée en cal/m² h
 α = coefficient de transmission au contact air-béton en cal/m² h °C
 λ = coefficient de conductibilité du béton en cal/m h °C

L'équation (II-21) peut s'écrire

$$(II-21') \quad \theta_s - \left(\theta_a + \frac{R}{\alpha} \right) = \frac{\lambda}{\alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_s.$$

Cette relation montre que l'effet de la chaleur apportée par l'insolation peut être assimilé à une augmentation $\frac{R}{\alpha}$ de la température extérieure.

L'insolation agit pendant quelques heures de la journée et d'une façon variable ; cependant, en regard des oscillations annuelles de la température extérieure, ces variations journalières ne jouent aucun rôle et il suffit de superposer à l'effet des variations annuelles de θ_a celui de la quantité de chaleur moyenne apportée journellement par le rayonnement.

II - 3b) Valeurs numériques

Le coefficient de transmission α au contact air-béton peut varier, selon l'intensité des courants de convection et du vent frappant la surface, de

$$\alpha = 15 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C} \quad \text{à} \quad \alpha = 40 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}.$$

Quant à l'intensité de l'insolation S , elle varie selon les époques de l'année et la situation géographique de l'endroit ; la quantité de chaleur R déposée par le rayonnement à la surface du mur et non réfléchi immédiatement dépend, en outre, de l'orientation du mur par rapport aux rayons solaires, laquelle varie au cours de la journée et au cours de l'année.

A l'insolation directe se superposent d'autres phénomènes secondaires : de même que le barrage réfléchit immédiatement une partie des rayons qu'il reçoit, le sol, et éventuellement le lac, réfléchissent sur le barrage une certaine proportion des rayons qui les frappent ; le ciel émet aussi un rayonnement diffus, qui est faible par un temps serein, comme par un temps très couvert, mais qui est plus intense par un temps clair, légèrement nuageux.

Le béton, n'étant pas un corps noir, ne s'approprie qu'une partie de l'énergie calorifique reçue de l'insolation directe et des phénomènes accessoires, selon son pouvoir d'absorption. Faute de mesures

de ce pouvoir d'absorption, on peut admettre que, dans le domaine des longueurs d'onde en cause, il doit être de 50 à 70 %.

Mais le barrage n'est pas seulement un récepteur de rayons calorifiques ; il en émet à son tour, particulièrement pendant la nuit, où il est plus chaud que l'atmosphère ; alors, il envoie des rayons vers le ciel, et aussi contre le terrain avoisinant (en quantité très faible, il est vrai, puisque ce terrain n'est pas à une température très différente de celle du barrage).

On conçoit qu'une étude détaillée de tous ces phénomènes et leur prise en considération dans le calcul préalable de l'évolution thermique d'un barrage serait très complexe, les conditions pouvant varier notablement d'un endroit à un autre ; de plus, les données précises qui seraient nécessaires font le plus souvent défaut. Cela n'a heureusement pas une trop grande importance, parce que ces phénomènes secondaires se compensent en partie ; il n'y a pas d'inconvénient à les négliger pour ne tenir compte que de l'insolation directe, lorsqu'il s'agit d'étudier les variations de température annuelles. Tout au plus ces phénomènes pourraient-ils jouer un certain rôle dans le calcul des variations de température journalières.

Même en ce qui concerne l'intensité de l'insolation directe, la documentation est relativement peu abondante, incomparablement moins en tout cas que les mesures de température de l'air. Cela tient certainement en bonne partie au fait que la mesure du rayonnement et des phénomènes accessoires est beaucoup plus délicate et complexe que celle de la température. Elle semble n'avoir été poursuivie de façon systématique que par les instituts de recherches de certaines stations climatiques (*). D'autre part, on s'est souvent borné à mesurer le rayonnement sur une surface horizontale ; or, la relation entre les angles d'incidence des rayons solaires sur une surface horizontale et sur une paroi verticale dépend de la saison, du moment de la journée, et de l'orientation de la paroi par rapport au plan méridien, sans parler des conditions locales, comme la présence d'un écran de montagnes, influant sur la durée de l'insolation. Il n'existe donc pas de relation simple permettant de calculer

(*) Nous devons une grande part de la documentation sur ce sujet à l'amabilité de M. le Dr W. Mörkofer, directeur de l'Observatoire physico-météorologique de Davos.

l'intensité du rayonnement reçu sur le parement d'un barrage, lorsqu'on connaît uniquement les mesures faites sur une surface horizontale. On possède cependant quelques résultats d'observations directes sur des parois verticales, entre autres dans l'ouvrage déjà ancien de Früh⁽⁷⁾ qui donne les valeurs observées à Arosa (altitude 1750 m, latitude 46° 47' N).

Le graphique II-9 reproduit ces résultats (*) en regard des valeurs trouvées sur des surfaces horizontales à Davos et Arosa. On constate une bonne concordance des chiffres indiqués pour les deux stations,

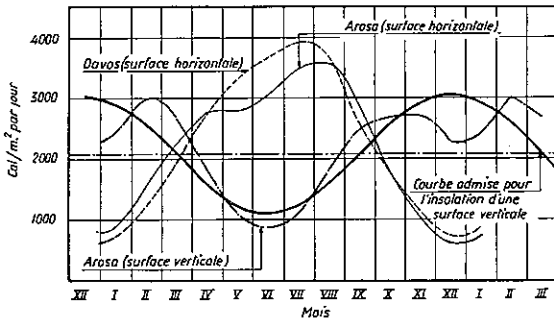


FIG. II-9. — Insolation observée à Davos et à Arosa et diagramme sinusoïdal équivalent.

dont l'exposition est comparable (Davos : altitude 1560 m, latitude 46° 48' N). A remarquer aussi qu'en hiver, le rayonnement sur une paroi verticale est beaucoup plus fort qu'en été ; le soleil étant alors plus bas sur l'horizon, les rayons frappent la paroi sous une incidence beaucoup plus forte qu'en été. C'est l'inverse sur une surface horizontale.

En assimilant la courbe de variation du rayonnement à une sinusoïde, on trouve que l'apport de chaleur est d'environ 1100 Cal/m² par jour en été et 3000 Cal/m² par jour en hiver.

(*) Compte tenu du fait que les valeurs indiquées par Früh comme étant des Cal/cm² min. doivent être en réalité des Cal/cm² jour. Il s'agit sans doute d'une erreur d'impression dans l'ouvrage cité ci-dessus.

(7) FRÜH : *Geographie der Schweiz*, Saint-Gall, 1930. Tome I, page 232.

Le béton n'étant pas un corps noir, il réfléchit immédiatement une partie de la chaleur reçue ; on est donc fondé, à défaut d'indications plus précises, à réduire les chiffres ci-dessus, par exemple de 20 à 30 %. D'autre part, un barrage se trouve en règle générale au fond d'une vallée, où la durée d'insolation est plus faible que sur les versants largement dégagés d'Arosa et de Davos, où les observations ont été faites ; on pourra donc apporter une seconde réduction, de 20 à 30 %, sur ces chiffres.

Comme il a été dit au paragraphe précédent, l'effet de l'apport de chaleur par rayonnement R peut être assimilé, dans le calcul des températures du béton, à une élévation $\frac{R}{\alpha}$ de la température extérieure, α étant le coefficient de transmission au contact air-béton.

Si $\alpha = 15 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$ (air calme),

$$\text{en été } \frac{R}{\alpha} = (0,50 \text{ à } 0,60) \frac{1100 \text{ Cal/m}^2 \text{ jour}}{24 \text{ h/jour} \cdot 15 \text{ Cal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}} = \underline{1,5^\circ\text{C à } 1,8^\circ\text{C}}$$

$$\text{en hiver } \frac{R}{\alpha} = (0,50 \text{ à } 0,60) \frac{3000}{24 \times 15} = \underline{4,2^\circ\text{C à } 5,4^\circ\text{C}}$$

En résumé, on peut tenir compte de l'influence de l'insolation sur le parement d'un barrage exposé au midi en majorant la température de l'air, du côté sud, au maximum de 2°C en été et de 5°C en hiver. (Règle valable pour les Alpes suisses.)

II - 4. CALCUL PRATIQUE DES VARIATIONS DE TEMPÉRATURE D'UN BARRAGE-VOÛTE

Du fait de ses liaisons, un arc encastré soumis à des variations de température subit des efforts hyperstatiques, lesquels dépendent, d'une part, de la différence entre la température moyenne de l'arc à l'instant considéré et celle qu'il avait au moment de sa construction (plus exactement, à l'instant du clavage), et d'autre part, de la différence de température entre un parement et l'autre. Lors de

l'établissement d'un projet de barrage-voûte, il faut donc connaître au moins les états thermiques extrêmes, et pour cela, les conditions de température du milieu ambiant, air et eau.

II - 4a) Température de l'air

Si les températures à l'emplacement du futur barrage ont été observées pendant une durée suffisante, de quelques années, on tracera la courbe des moyennes journalières ou mensuelles ; cette courbe, périodique, peut être remplacée par une sinusoïde équivalente, c'est-à-dire de même valeur moyenne annuelle et limitant la même aire. A défaut de ces renseignements, que d'ailleurs on possède rarement avant la construction du barrage à l'emplacement envisagé, on se basera sur les statistiques établies pour des endroits analogues. En Suisse, on constate que, dans les grandes lignes, la température moyenne annuelle dépend à peu près linéairement de l'altitude du lieu, et que l'amplitude des variations mensuelles est de 9° à 10° C ; les endroits fortement exposés, soit au soleil, soit aux courants d'air, peuvent s'écarter de quelques degrés de cette règle, mais ce ne sont généralement pas les endroits où l'on édifie des barrages, qui sont plutôt situés au fond des vallées, dans des endroits abrités. On pourra donc s'inspirer du graphique II-10 pour estimer les températures de l'air.

II - 4b) Température de l'eau

De toutes les températures observées, celle de l'eau des lacs d'accumulation paraît bien la moins fréquemment mesurée.

D'après les indications de Kornfeld⁽¹⁾, les températures observées au Grimsel par M. le Dr Kaech ont été :

en été : de 2 à 3° C à quelques mètres de profondeur ;
 4° C au-delà de 10-20 m de profondeur.

(1) KORNFIELD, *loc. cit.* (voir page 10).

Au Wäggital, d'après le même auteur, on a mesuré :

		Hauteur d'eau au-dessus du thermomètre	Température
En 1924, mois d'août		10 m	12° C
septembre		15	10
octobre		17	10
novembre		19	8
décembre		19	6
1925	moyenne	20	6
1926	»	42	3
1927	»	45	4
1928	»	41	5
1929	»	34	6
1930	»	34	6

Dans le lac de la Dixence, c'est-à-dire dans une région alpestre, non loin des glaciers, nous avons trouvé en septembre 1954, entre 10 et 65 mètres de profondeur, une température assez uniforme d'environ 7° C à proximité du parement du barrage.

II - 4c) Bases des calculs. Températures extérieures sur les parements

Du côté aval, on admettra que la température varie sinusoïdalement au cours de l'année ; pour un barrage dans les Alpes, on pourra, à défaut de résultats d'observations, estimer les valeurs extrêmes d'après le graphique II-10. S'il s'agit d'un barrage mince, on tiendra compte du saut de température entre l'air et le béton en ajoutant une « surépaisseur thermique » d'environ 5 à 15 cm à l'épaisseur réelle du mur (voir §§ I-3 et I-4). Dès que l'épaisseur de l'ouvrage dépasse une dizaine de mètres, on peut pratiquement négliger cette surépaisseur ; cette correction ne joue plus un grand rôle et n'apporte qu'une précision illusoire.

Quand le parement aval est tourné au sud, on tiendra compte de l'insolation en majorant la température de l'air, par exemple de 2° C en été et de 5° C en hiver.

Du côté amont, le couronnement est toujours exposé à l'air, et éventuellement à l'insolation ; au-dessous du niveau de la prise d'eau, le parement est toujours dans l'eau ; entre ces niveaux, il est en contact alternativement avec l'air et avec l'eau, selon les périodes de vidange et de remplissage du lac. Si, comme c'est généralement le cas au moment de l'étude du projet, on ne connaît pas d'avance le programme exact d'exploitation du lac, on se contentera d'admettre, par exemple, que les températures extrêmes à l'amont varient linéairement entre le couronnement et le niveau minimum du lac.

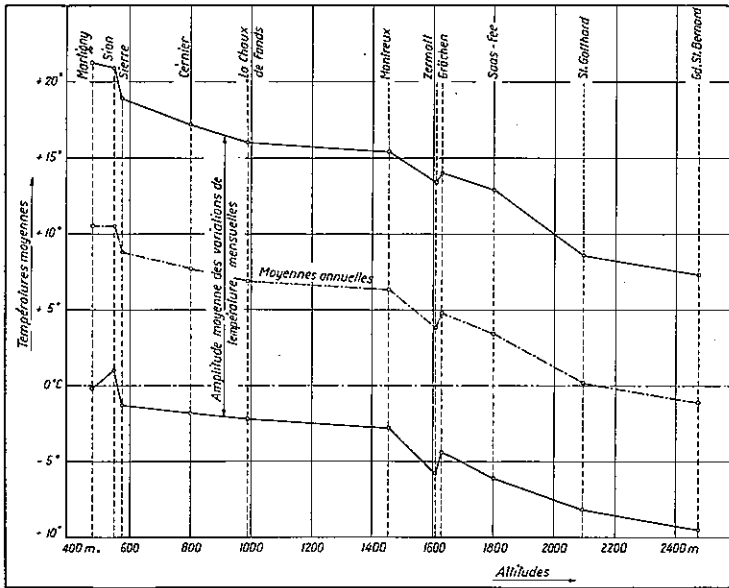


FIG. II-10. — Températures moyennes observées à différents endroits de Suisse.

II - 4d) Exemple de calcul des variations de température annuelles dans un arc de barrage-voûte

Soit à calculer les températures fictives sur les parements (diagramme linéaire, voir § II-2b), au niveau 1850 du barrage représenté sur la figure II-11, le parement amont étant orienté au midi. A ce niveau, l'épaisseur du barrage est de 36,1 m ; on peut dans ce cas négliger l'effet de la surépaisseur thermique et admettre que les parements ont la même température que l'air à l'aval et que l'eau à l'amont.

Parement aval : D'après le graphique II-10, on admet pour la température de l'air, à l'altitude 1850 :

$$\begin{aligned}\theta_{a \max} &= + 12^{\circ} \text{ C} \\ \theta_{a \min} &= - 8^{\circ} \text{ C} \\ \overline{\theta}_a &= + 2^{\circ} \text{ C} \cong \overline{\theta}_{bo} \quad (*)\end{aligned}$$

Amplitude des variations $A_a = 10^{\circ} \text{ C} \cong A_{bo} \quad (*)$

Parement amont :

Pour tenir compte de l'insolation, on majore les températures de l'air du côté amont (orienté au sud), de 2° C en été et de 5° C en hiver, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\theta_{a \max} &= + 14^{\circ} \text{ C} \\ \theta_{a \min} &= - 3^{\circ} \text{ C} \\ \overline{\theta}_a &= + 5,5^{\circ} \text{ C}\end{aligned}$$

Ces valeurs sont applicables au couronnement, toujours hors de l'eau.

Le niveau minimum du lac est à la cote 1800. On admet qu'au-dessous, la température de l'eau reste constamment égale à + 4° C.

(*) Le premier indice a la signification :

$$a = \text{air}; \quad b = \text{béton}; \quad e = \text{eau}.$$

Le deuxième indice représente l'abscisse du point considéré par rapport au parement origine du mur (ici le parement aval) :

$$o = \text{parement aval}; \quad L = \text{parement amont}.$$

Au besoin, un troisième indice préciserait l'époque considérée.

Dans tous les cas où aucun doute n'est possible, nous laissons tomber les indices superflus, pour alléger l'écriture. Ainsi, lorsqu'il ne peut s'agir manifestement que de la température du béton, nous supprimons l'indice *b*.

Températures extérieures extrêmes à l'aval

Température des arcs

Températures extérieures extrêmes à l'amont

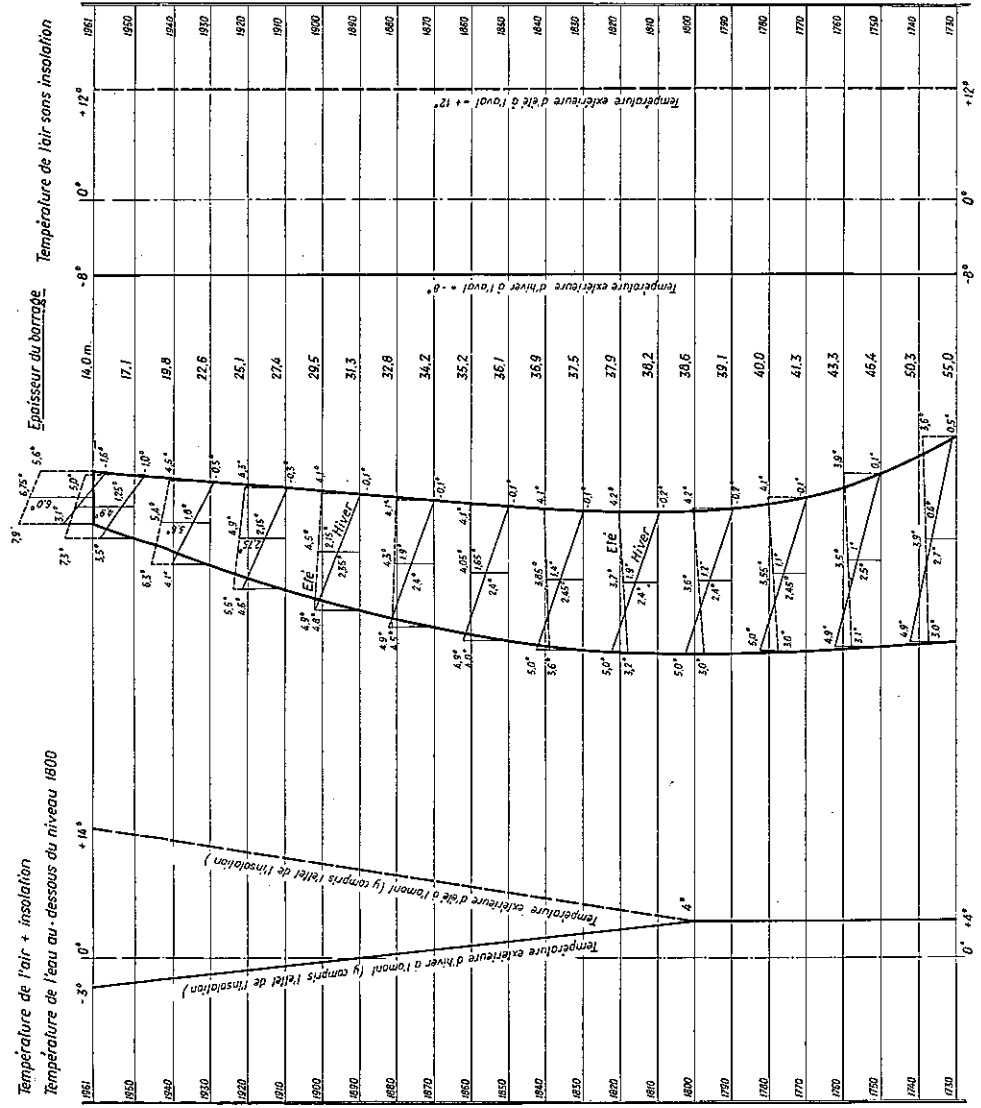


FIG. II-11. — Bases et résultats du calcul des températures à admettre dans les arcs d'un barrage-voûte en montagne. Exemple.
 (Températures, sur les parements, arrondies à 0,1 °C près)

Entre le couronnement (niveau du lac, 1960 m) et la cote 1800, on suppose que les températures extrêmes varient linéairement avec l'altitude. On obtient ainsi au niveau 1850, pour la température du parement amont :

$$\theta_{L \max} = 7,13^{\circ} \text{ C}$$

$$\theta_{L \min} = 1,81^{\circ} \text{ C}$$

$$\bar{\theta}_L = 4,47^{\circ} \text{ C}$$

Amplitude des variations $A_L = 2,66^{\circ} \text{ C}$

Le rapport des amplitudes des variations sur les parements amont et aval vaut

$$n = \frac{A_L}{A_0} = \frac{2,66}{10} = 0,266.$$

Le graphique II-7 donne, pour un mur de 36,4 m et $n = 0,266$:

Amplitude des variations de la température moyenne :

$$A_m = \frac{8,3}{100} A_0 = 0,83^{\circ} \text{ C}.$$

Valeurs extrêmes de la température moyenne :

$$\text{été} \quad \bar{\theta}_{\max} = \frac{\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_L}{2} + A_m = \frac{2,0 + 4,47}{2} + 0,83 = 4,07^{\circ} \text{ C}$$

$$\text{hiver} \quad \bar{\theta}_{\min} = \frac{\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_L}{2} - A_m = \frac{2,0 + 4,47}{2} - 0,83 = 2,41^{\circ} \text{ C}.$$

Différence maximum des températures fictives sur les parements dans le cas où $\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_L$:

$$D' = \frac{25,2}{100} A_0 = 2,52^{\circ} \text{ C}.$$

Différence maximum des températures fictives sur les parements, dans le cas réel où $\bar{\theta}_0 = 2^{\circ} \text{ C}$ et $\bar{\theta}_L = 4,47^{\circ} \text{ C}$:

$$\text{été} \quad (\theta'_0 - \theta'_L) = (\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_L) + D' = -2,47 + 2,52 = +0,05^{\circ} \text{ C}$$

$$\text{hiver} \quad (\theta'_0 - \theta'_L) = (\bar{\theta}_0 - \bar{\theta}_L) - D' = -2,47 - 2,52 = -4,99^{\circ} \text{ C}.$$

Températures fictives extrêmes :

parement amont :

été $\theta'_L = \bar{\theta}_{\max} - \frac{1}{2} (\theta'_0 - \theta'_L)_{\text{été}} = 4,07 - 0,03 = \underline{4,0^\circ \text{C}}$

hiver $\theta'_L = \bar{\theta}_{\min} - \frac{1}{2} (\theta'_0 - \theta'_L)_{\text{hiver}} = 2,41 + 2,50 = \underline{4,9^\circ \text{C}}$

parement aval :

été $\theta'_0 = \bar{\theta}_{\max} + \frac{1}{2} (\theta'_0 - \theta'_L)_{\text{été}} = 4,07 + 0,03 = \underline{4,1^\circ \text{C}}$

hiver $\theta'_0 = \bar{\theta}_{\min} + \frac{1}{2} (\theta'_0 - \theta'_L)_{\text{hiver}} = 2,41 - 2,50 = \underline{-0,1^\circ \text{C}}$

La figure II-12 représente les températures réelles et fictives dans l'arc considéré, au moment où la moyenne est la plus basse (1^{er} mars). A cause du déphasage des variations intérieures, cette époque n'est pas celle où les températures vraies des parements atteignent leur minimum (15 janvier); le retard par rapport à la température extérieure est d'environ 46 jours pour les murs dont l'épaisseur dépasse une dizaine de mètres (voir graphique II-7).

Le calcul ci-dessus appelle quelques commentaires :

1. On a superposé les plus grandes différences des températures fictives entre parements avec les valeurs extrêmes de la température

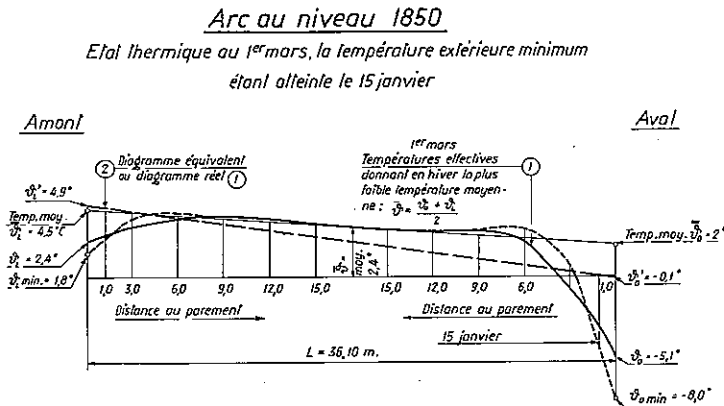


FIG. II-12. — Températures au 15 janvier et au 1^{er} mars dans l'arc au niveau 1850 du barrage représenté dans la figure II-11.

moyenne ; or, ces extrema ne sont pas simultanés, puisque leurs déphasages, par rapport aux oscillations de la température extérieure, ne sont pas égaux, comme le montre la figure II-7. Toutefois, pour des murs très épais, le déphasage des deux fonctions tend asymptotiquement vers la valeur de 46 jours environ. Dans l'exemple ci-dessus, la différence de déphasage est d'environ 6 jours, ce qui est négligeable : au voisinage de son maximum, chaque fonction sinusoïdale varie assez peu pour que l'on puisse admettre qu'elle reste constante pendant quelques jours.

Si l'on voulait néanmoins tenir compte de ce déphasage, en particulier pour des murs plus minces, il serait facile de procéder comme suit : connaissant l'amplitude des variations sinusoïdales de la température moyenne et leur déphasage, par rapport aux températures extérieures, on peut tracer la sinusoïde correspondante. De même, pour la courbe représentant la différence des températures fictives. Par exemple, dans le cas ci-dessus, la température extérieure passant par son minimum au 15 janvier, la température moyenne atteindra son minimum (2,41° C) environ 45 jours et demi plus tard, soit le 1^{er} mars. La différence des températures entre parements atteindra son minimum (— 4,99° C) 40 jours après le 15 janvier, soit le 24 février. Sachant que

$$\theta'_0 = \bar{\theta} + \frac{1}{2} (\theta'_0 - \theta'_L) \quad \text{et} \quad \theta_L = \bar{\theta} - \frac{1}{2} (\theta'_0 - \theta'_L)$$

on peut tracer les sinusoïdes θ'_0 et θ'_L , qui donnent les températures à admettre sur les parements, à toute époque de l'année (voir fig. II-13). Dans le cas particulier, le déphasage relatif des courbes représentatives de la température moyenne et de la différence entre parements est assez faible pour que l'on puisse admettre la simultanéité de leurs valeurs extrêmes. Ce ne serait plus le cas pour un mur de moins de 10 mètres d'épaisseur.

2. Dans les Alpes, on commence généralement à vider les lacs d'accumulation au début de l'hiver, alors que les températures les plus basses apparaissent dans le barrage en février-mars. Les sollicitations thermiques les plus importantes ne doivent donc pas être cumulées avec l'effet de la poussée maximum de l'eau, sinon dans des cas exceptionnels, ou dans une hypothèse très pessimiste destinée

à évaluer les plus fortes contraintes possibles de l'ouvrage. Un procédé raisonnable consistera à superposer aux contraintes résultant de la poussée maximum de l'eau, celles que provoque l'état thermique au début de l'hiver, par exemple le 1^{er} décembre. Dans le cas envisagé, la figure II-13 montre qu'à cette date, il faudrait admettre

à l'amont, $\theta'_L = +4,5^{\circ}\text{C}$; à l'aval, $\theta'_0 = +2,0^{\circ}\text{C}$.

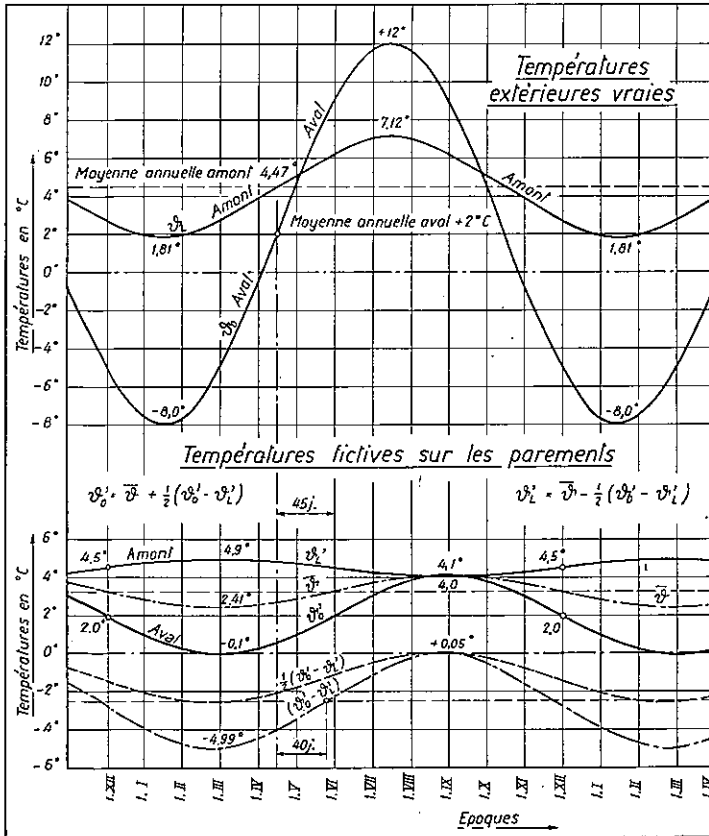


FIG. II-13. — Variations au cours de l'année, des températures extérieures vraies et des températures fictives à admettre sur les parements au niveau 1850 du barrage représenté dans la figure II-11.

3. Dans l'exemple représenté par la figure II-14, le calcul conduit à admettre sur le parement amont, au-dessous du niveau 1890, une température fictive plus basse en été qu'en hiver, alors même que les températures réelles extérieures sont plus basses en hiver, aussi bien à l'amont qu'à l'aval. Ce résultat paradoxal apparaît toutes les fois que la température extérieure sur l'un des parements varie relativement peu. Supposons, pour l'expliquer, le cas limite où la température extérieure amont reste constante, et égale à 0° C. Les diagrammes linéaires équivalents aux courbes de températures réelles à l'intérieur du béton ont l'allure indiquée à la figure II-14. La droite équivalente au diagramme des températures réelles passe, sur le parement amont, par une valeur négative en été et positive en hiver. Le résultat reste qualitativement le même si la température extérieure à l'amont varie peu par rapport à celle d'aval.

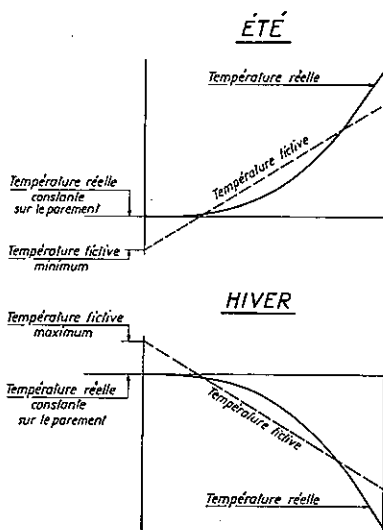


FIG. II-14. — Allure des températures réelles et fictives dans le cas où la température superficielle réelle d'un parement ne varie pas.

4. Dans la figure II-12, les courbes de répartition des températures réelles au niveau 1850, calculées selon la théorie exposée au paragraphe II-2, ne sont données qu'à titre de comparaison avec la droite fictive admise. Le calcul de cette répartition réelle n'est pas nécessaire pour la détermination des efforts hyperstatiques dans l'arc, sous l'effet des variations de température. On peut se contenter, dans l'étude du projet, de calculer les températures fictives équivalentes, dont la répartition, linéaire, est définie par les valeurs extrêmes sur les parements. Par contre, le calcul exact est nécessaire lorsqu'il s'agit d'étudier les contraintes locales, ou d'analyser les résultats de mesures de température ou de contraintes, exécutées sur un ouvrage en service. En effet, les variations de température de l'arc produisent des contraintes de deux espèces, à deux degrés si l'on peut dire :

Si l'arc était libre à ses extrémités, sa fibre moyenne subirait un certain allongement, proportionnel à l'élévation de température moyenne, et ses sections extrêmes tourneraient l'une par rapport à l'autre d'un certain angle, proportionnel à la différence de température entre parements. Selon l'hypothèse de Bernoulli-Navier, les sections planes et perpendiculaires à l'axe avant déformation restent planes et perpendiculaires à l'axe après déformation, on peut, pour calculer les déplacements, remplacer dans chaque section le diagramme des températures vraies par un diagramme linéaire équivalent (c'est-à-dire ayant la même aire et le même centre de gravité).

Du fait de ses liaisons aux extrémités, l'arc subit aux encastresments des efforts que nous pouvons qualifier d'hyperstatiques extérieurs, lesquels provoquent dans l'arc des contraintes que l'on calcule par les méthodes classiques et que nous appellerons « de première espèce ».

Mais revenons à l'arc libre à ses extrémités, en supposant toutefois que les sections planes et perpendiculaires à l'axe restent planes lors d'une variation de température (*). Si la température locale était effectivement répartie selon le diagramme linéaire, chaque fibre s'allongeant proportionnellement à son élévation de température,

(*) Ainsi, pour ramener ensuite l'arc dans ses liaisons d'appuis, il suffira de lui appliquer les efforts hyperstatiques de première espèce, comme on le fait dans les méthodes de calcul usuelles, classiques.

les sections planes resteraient planes d'elles-mêmes ; l'arc s'allongerait et ses extrémités tourneraient sans qu'aucune contrainte ne prenne naissance. En réalité, les températures effectives étant généralement distribuées selon une loi différente de la droite, pour que les sections planes restent planes, il doit se produire en chaque point une contrainte proportionnelle à l'écart entre la température vraie et celle du diagramme linéaire. Ces contraintes, hyperstatiques intérieures, se produisent même dans l'arc libre, indépendamment des liaisons extérieures ; nous pouvons les appeler « de seconde espèce ». Elles s'ajoutent aux contraintes de première espèce provenant des liaisons hyperstatiques extérieures.

En fait, il n'est pas d'usage de tenir compte de ces contraintes de seconde espèce dans les calculs de projets de barrages-voûtes, pas plus d'ailleurs que dans les projets d'autres ouvrages, comme les barrages-poids, où elles ont la même importance. Il convient de remarquer, toutefois, que ces contraintes n'ont pas la même signification que celles qui proviennent de la poussée de l'eau. Etant d'origine uniquement hyperstatique, elles sont limitées par l'intervention des phénomènes de plasticité, de fluage, en un mot d'adaptation du béton, qui s'accroissent au fur et à mesure que les contraintes augmentent, ceci d'autant plus que les variations de température se produisent généralement avec une certaine lenteur. Si la moindre fissure venait à apparaître, les contraintes thermiques s'évanouiraient même complètement dans son voisinage (*). On ne doit donc pas les juger avec la même sévérité que les contraintes provenant de forces extérieures bien définies, importantes et permanentes, comme la poussée de l'eau. Il n'en reste pas moins que pour l'étude des contraintes locales extrêmes possibles et de l'interprétation des mesures, on doit en tenir compte, dans les barrages-poids aussi bien que dans les barrages-voûtes.

(*) Relevons le fait que les contraintes de seconde espèce ne se manifestent pas par une déformation ; elles sont précisément dues au fait que la déformation est empêchée. Dans un ouvrage existant, il est donc impossible de les mesurer avec les moyens habituels (extensomètres mécaniques ou électriques, strain-gauges, etc.). La seule manifestation éventuellement visible de ces contraintes est une fissuration, qui peut apparaître lorsqu'on a affaire à des tractions suffisamment fortes ; mais l'apparition même d'une fissure provoque la disparition de la contrainte qui l'a fait naître.

II - 5. PROFONDEUR DE PÉNÉTRATION DU GEL

Certaines expériences malheureuses faites autrefois sur des ouvrages en béton coulé situés en montagne (barrages de Barberine et de Wäggital, par exemple) ont attiré l'attention sur les dégâts que peut provoquer le gel, au voisinage des parements surtout. On y a remédié tout d'abord en appliquant à la surface des murs un revêtement de pierre naturelle, puis, plus récemment, par l'emploi d'un béton de parement plus richement dosé que celui de la masse, et parfois additionné de produits spéciaux destinés à augmenter la résistance au gel. Ce n'est, en général, que pour les murs d'épaisseur relativement faible que l'on adopte un dosage uniformément élevé pour toute la masse, afin de simplifier l'exécution.

Il importe de se rendre compte de la profondeur à laquelle pénètre le gel avant de prescrire l'épaisseur du revêtement ou du béton de parement.

La formule

$$(II-6) \quad A(x)_{\max} = \sqrt{f^2 + \psi^2}$$

permet de trouver en tout point du mur l'amplitude des variations de température annuelles ; lorsque le mur est épais, par exemple de plus d'une trentaine de mètres, on peut, avec une très bonne approximation, appliquer entre chaque parement et le milieu du mur la formule plus simple, relative à un mur d'épaisseur infinie

$$(II-6'') \quad A(x)_{\max} = A_0 e^{-\mu x}$$

ou le graphique II-3 qui la représente.

En soustrayant en chaque point cette amplitude de la température moyenne annuelle en ce point (température obtenue par interpolation linéaire entre les valeurs moyennes sur les parements, $\bar{\theta}_0$ et $\bar{\theta}_L$), on obtient immédiatement l'enveloppe des températures annuelles minima à l'intérieur du mur. Il est donc facile de voir quelle est la zone où le gel peut intervenir au cours de l'année, gel de longue durée.

Etant donné que l'eau libre à l'intérieur du béton contient certainement des sels en solution, il est plausible d'admettre qu'elle

ne gèle pas à 0° C, mais un peu au-dessous, par exemple à — 1° C ou — 2° C.

La figure II-15 montre l'enveloppe des températures minima de l'arc de 36,1 m d'épaisseur étudié au paragraphe II-4 d). On constate qu'au voisinage du parement amont, par suite de l'insolation principalement, le minimum de la moyenne journalière ne descend pas au-dessous de + 1,8° C. Près du parement aval, une zone d'environ 2,60 m de profondeur subit au cours de l'hiver une température inférieure à — 1° C ; on peut admettre qu'elle risque de geler, une fois par année, pendant une certaine durée.

Mais ce qui peut être dangereux pour le béton, ce n'est pas tant de subir une fois par an un gel prolongé, que d'être soumis à des alternances fréquentes de gel et dégel. Tel est le cas de la zone très proche du parement, où se font sentir les fluctuations journalières, lesquelles se greffent sur les variations annuelles. Pour les calculer, on peut appliquer encore la formule (II-6") mais en prenant pour μ la valeur

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{aT}} = \sqrt{\frac{\pi}{0,004 \times 24}} = 5,72 \text{ m}^{-1}$$

au lieu de $\mu = 0,3 \text{ m}^{-1}$. Vis-à-vis de ces fluctuations journalières, un mur d'épaisseur donnée se comporte comme se comporterait vis-à-vis des variations annuelles un mur 19,1 fois plus épais ; un mur de 2,0 m d'épaisseur peut déjà être assimilé à un mur infiniment épais. Les fluctuations journalières deviennent imperceptibles au-delà d'une profondeur de 0,60 à 0,80 m.

Dans la figure II-15, on a représenté l'état thermique de l'arc au 15 janvier, au moment où le parement est le plus froid, de manière à obtenir les valeurs minima atteintes au voisinage du parement, en supposant une fluctuation journalière de la température extérieure de $\pm 8^\circ \text{C}$. En toute rigueur, à une certaine profondeur, la température annuelle n'atteint pas son minimum le 15 janvier, mais un peu plus tard à cause du déphasage. Si l'on veut déterminer la température atteinte au cours de l'année en chaque point, et en particulier la profondeur à laquelle peut pénétrer le gel au moins une fois par an, c'est à l'enveloppe des minimums annuels qu'il

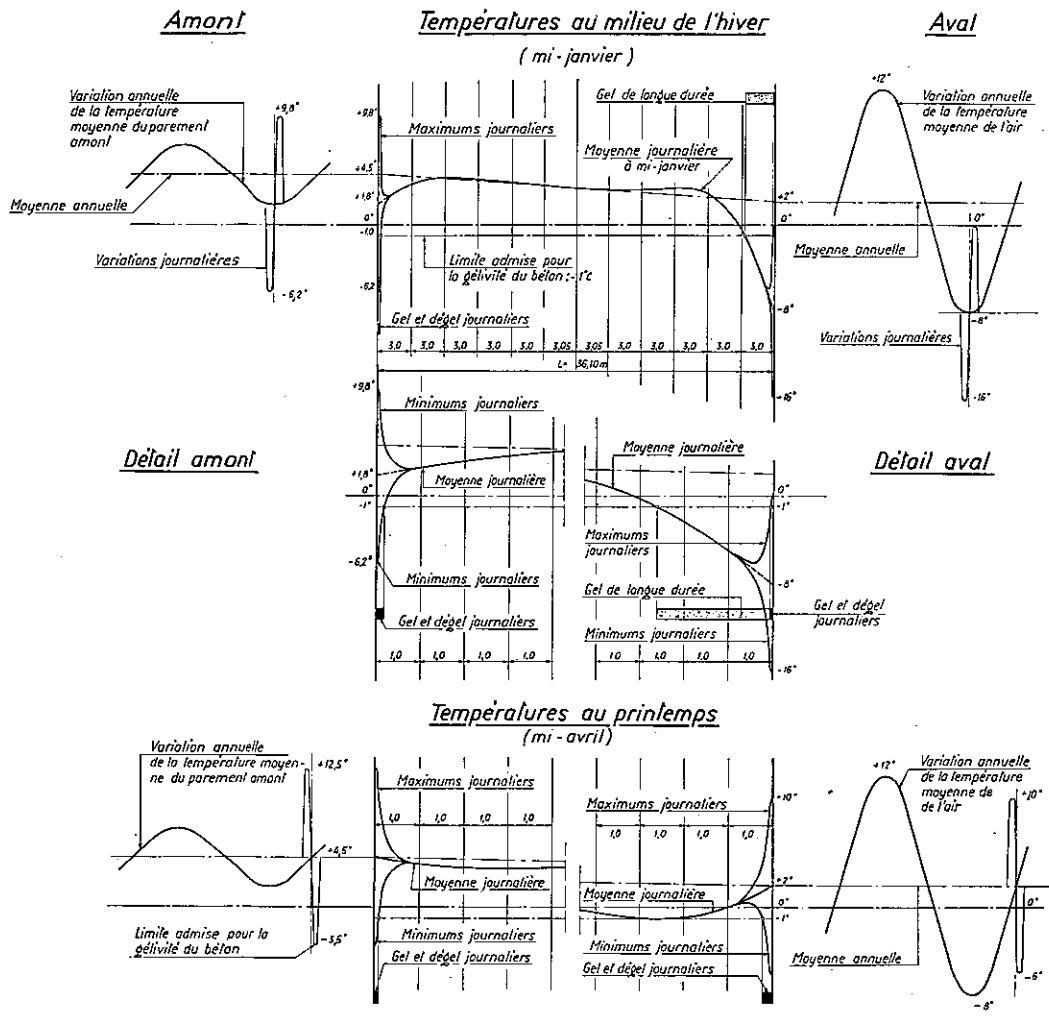


FIG. II-15. — Enveloppes des températures atteintes au milieu de l'hiver et au printemps dans l'arc au niveau 1850 du barrage représenté dans la figure II-11.

faut superposer l'enveloppe des fluctuations journalières. C'est ce que représente la figure II-16.

La situation la plus délicate se présentera à l'époque où la température moyenne journalière du parement sera voisine de -1°C à -2°C , parce qu'alors toute la zone avoisinante sera

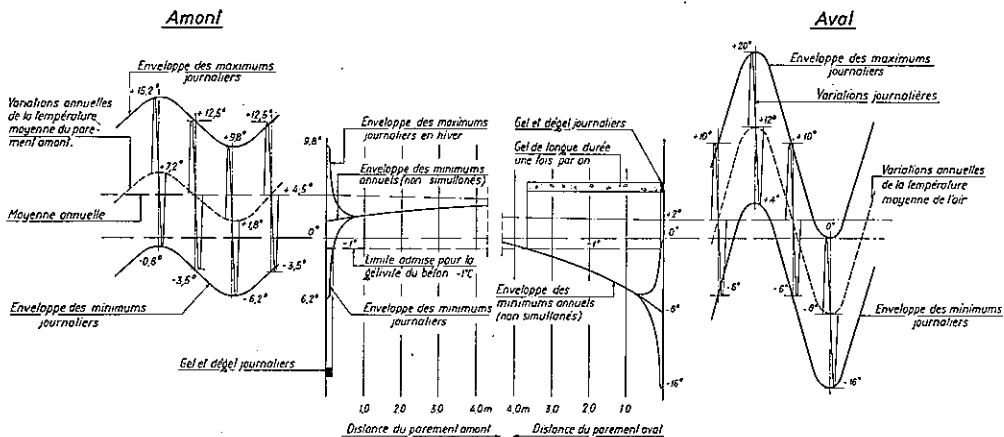


FIG. II-16. — Enveloppes des températures extrêmes atteintes au cours de l'année dans l'arc au niveau 1850 du barrage représenté dans la figure II-11.

soumise chaque jour au gel et au dégel, sur une profondeur de 0,60 à 0,80 m. Il ne faudrait pas que l'épaisseur du béton de parement soit limitée à cette valeur, pour éviter que la zone de transition entre les bétons de qualités différentes coïncide avec la limite du gel quotidien. On donnera au béton de parement une épaisseur d'au moins 1,5 à 2,0 mètres si l'on recherche uniquement une protection contre les alternances journalières de gel et dégel, et de 3 à 4 mètres si l'on veut étendre cette protection au cas du gel annuel.

CHAPITRE III

REFROIDISSEMENT NATUREL

III - 1. GÉNÉRALITÉS

Lors de l'établissement d'un projet de barrage, on ne saurait étudier l'évolution de la température par un calcul tenant compte rigoureusement de la forme et des dimensions de l'ouvrage projeté. Les conditions au contour sont complexes, les températures du milieu ambiant ne peuvent avoir à ce moment qu'un caractère de probabilité, puisqu'il s'agit de prévisions, et le mode de construction (programme des travaux) influencera évidemment l'évolution thermique du barrage. Outre sa difficulté, un calcul très fouillé tenant compte des formes exactes ne se justifie pas au premier stade des études puisque les données de base présentent un caractère hypothétique. On se contente alors d'assimiler le barrage à un corps géométrique simple ou à une juxtaposition de plaques, cylindres, parallélépipèdes, soumis à des variations de température extérieures qui sont une image très simplifiée, un schéma, des conditions réelles ou probables.

Ainsi, par exemple, un barrage-voûte ou un pilier de barrage à contreforts, dont la surface est grande par rapport à l'épaisseur, peuvent souvent être assimilés à une paroi, de surface infinie et d'épaisseur correspondante à celle de l'ouvrage réel au niveau considéré ; cette hypothèse néglige l'influence des bords. S'agit-il d'évaluer l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que cette paroi, après s'être échauffée par le dégagement de chaleur de prise du ciment, revienne à la température ambiante, on pourra la supposer plongée brusquement, à la fin du dégagement de chaleur, dans un

milieu à température constante, égale à la température moyenne du lieu. Veut-on suivre l'évolution thermique de plus près, pour déterminer l'époque la plus favorable au clavage des arcs, ou étudier les fluctuations de la température interne au cours des années, ou encore évaluer la profondeur de pénétration du gel, on tiendra compte du fait que la température extérieure n'est pas constante mais varie au cours de l'année, voire de la semaine ou de la journée ; on admettra pour commencer que cette variation est sinusoïdale dans le temps. Ce n'est que dans des cas exceptionnels, où l'on disposera d'observations précises, que l'on envisagera d'introduire dans les calculs le régime réel, non absolument sinusoïdal, des variations de la température extérieure, par exemple lorsqu'il s'agira de discuter après coup le résultat de mesures faites sur l'ouvrage.

Un élément d'ouvrage dont la section horizontale présente dans tous les sens des dimensions du même ordre de grandeur ne peut plus être assimilé à une paroi, mais doit être comparé à un cylindre ou un prisme si sa hauteur est grande, ou à un parallélépipède, un cube, une sphère, si sa hauteur est faible.

Enfin, si l'on s'intéresse à ce qui se passe au cours des premiers jours d'existence du béton, on devra superposer l'effet de dégagement de chaleur interne, en pleine évolution, à celui du refroidissement par les faces.

Il n'existe pas de méthode générale d'intégration de l'équation fondamentale de la transmission de chaleur ; il faut dans chaque cas particulier rechercher le procédé de calcul qui permettra le mieux d'exprimer les conditions aux limites du problème. Dans cette recherche, la collaboration du mathématicien est particulièrement fructueuse, souvent même indispensable à l'ingénieur.

Nous exposons ci-dessous le calcul des corps géométriques de formes diverses soumis à des conditions de température variées ; on choisira le schéma le plus approprié à chaque cas concret, selon le but poursuivi et l'exactitude recherchée.

**III - 2. REFROIDISSEMENT D'UNE PAROI PLANE, INDÉFINIE,
PLONGÉE BRUSQUEMENT DANS UN MILIEU
A TEMPÉRATURE INFÉRIEURE, CONSTANTE**

III - 2a) Calcul analytique

Une paroi, de surface infinie, à température initiale uniforme 1°C , dont les faces sont refroidies brusquement à 0° à l'origine des temps puis maintenues à cette température, se refroidit progressivement à l'intérieur ; à l'instant t , la température en un point quelconque, à distance x de la surface, est donnée par la relation ⁽⁸⁾

$$(III-1) \quad \theta_{(x,t)}^* = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin \frac{(1+2n)\pi x}{L} e^{-\frac{(1+2n)^2 \pi^2 a t}{L^2}}$$

où
$$A_n = \frac{4}{(1+2n)\pi}$$

θ^* , rapporté à une chute de température superficielle de 1°C , est une « valeur relative », sans dimensions. Dans une paroi ou un mur dont la température superficielle tombe brusquement de θ_i à θ_f , la température en un point quelconque vaudra :

$$(III-2) \quad \theta_{(x,t)} = \theta_f + (\theta_i - \theta_f) \theta^* \quad (*)$$

La figure III-1 représente les états thermiques successifs d'un mur en béton de 1,00 m d'épaisseur, de coefficient de diffusivité $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$, après une chute de température superficielle de 1°C . Les lois de similitude exposées au chapitre I permettent d'appliquer cet abaque au calcul de l'évolution thermique de murs d'épaisseur L quelconque, soumis à une chute de température $\Delta\theta_{\text{ext}} = (\theta_i - \theta_f)$ sur les faces, et constitués par un matériau de diffusivité a' .

⁽⁸⁾ Formule que l'on trouve, par exemple, sous une forme légèrement différente (l'origine des x étant choisie sur l'axe du mur) dans l'ouvrage de SRODOLA : *Turbines à vapeur et à gaz*, Ed. Dunod, Paris, 1925, page 959.

(*) On observera que la formule (III-1) donne la température résiduelle (et non la chute de température) en un point, sous l'effet d'une chute de température extérieure. θ_f est plus faible que θ_i . A un instant quelconque, la température locale $\theta(x, t)$ est encore supérieure à la température θ_f que le point considéré atteindra au bout d'un temps très long. Ceci explique la structure de la formule (III-2).

Mur

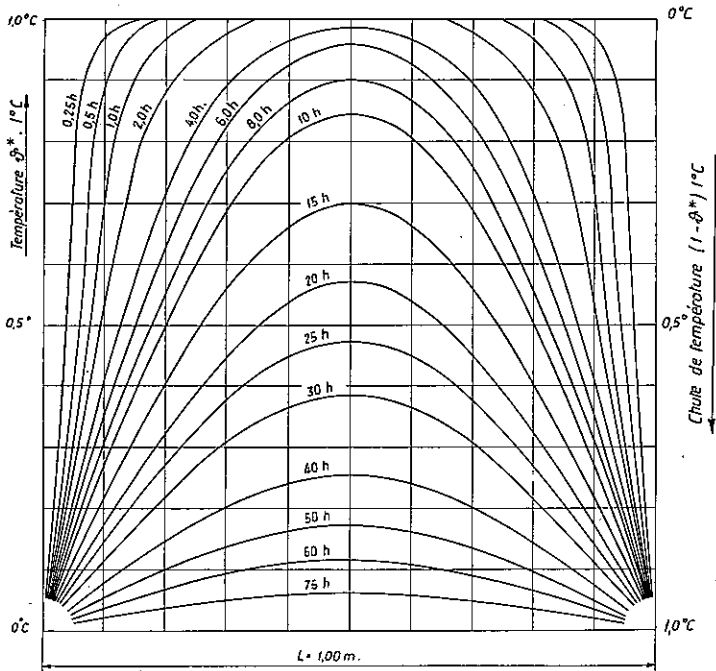


FIG. III-1. — Etats thermiques successifs d'un mur en béton de 1,00 m d'épaisseur, dont les faces subissent, à l'origine des temps, une chute de température de 1°C. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Il suffit de multiplier
 les longueurs par L ,
 les temps par $\frac{0,004}{a'} L^2$,
 les chutes de température par $\Delta\theta_{\text{ext}}$.

III - 2b) Calcul graphique par la méthode Schmidt

Bien que dans le cas d'une paroi plane envisagé ici l'équation différentielle de Fourier se laisse intégrer sous la forme (III-1) donnée ci-dessus, nous exposerons brièvement une méthode d'inté-

gration graphique ⁽⁹⁾, qui, en raison de sa généralité, peut être appliquée à l'étude de l'évolution thermique dans d'autres cas encore ou à l'étude d'autres phénomènes régis par l'équation de Fourier.

Soit $A_1 B_1 C_1 \dots$ la courbe de répartition des températures à un instant t_1 , la température extérieure étant θ_{ext} (voir figure III-2). Les droites $A_1 C_1$, $B_1 D_1$, $C_1 E_1$, etc. coupent les parallèles au parement passant par $B_1 C_1 D_1 \dots$ en des points $B_2, C_2, D_2 \dots$. Ces

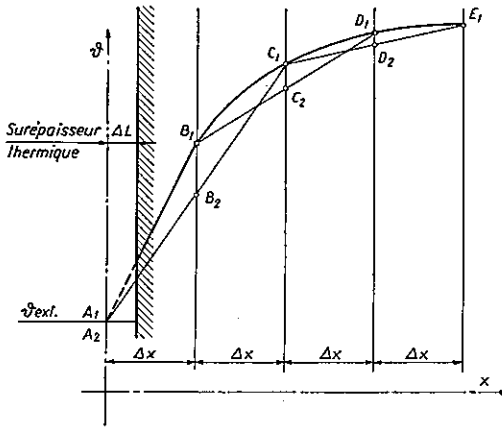


FIG. III-2. — Principe de la construction graphique de Schmidt.

points sont situés sur la courbe de répartition des températures à une époque t_2 , qu'il s'agit de déterminer ; pour le prouver, et pour déterminer t_2 , il suffit de partir de l'équation générale (I-1), écrite en différences finies, en remarquant qu'il s'agit ici d'un problème uni-dimensionnel, c'est-à-dire où la température en un point donné ne dépend à chaque instant que d'un seul paramètre, l'abscisse de ce point par rapport au parement du mur :

$$(III-3) \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = a \frac{\Delta^2\theta}{(\Delta x)^2}$$

où le symbole Δ représente un accroissement fini.

⁽⁹⁾ Voir article de E. SCHMIDT, dans *Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik. Aug. Föppl zum siebzigsten Geburtstag gewidmet von seinen Schülern*. J. Springer, éd., Berlin, 1924.

La construction graphique donne, par exemple,

$$(III-4) \quad -\Delta\theta_B = \theta_B - \frac{\theta_A + \theta_C}{2} = -\frac{1}{2}(\theta_A + \theta_C - 2\theta_B).$$

D'autre part, la différentielle seconde, différence des accroissements, peut s'écrire, à un instant donné :

$$(III-5) \quad \Delta^2\theta_B = (\theta_C - \theta_B) - (\theta_B - \theta_A) = \theta_A + \theta_C - 2\theta_B.$$

On remarque que

$$(III-6) \quad \Delta^2\theta_B = 2\Delta\theta_B.$$

Ces deux valeurs satisferont à l'équation fondamentale (I-1) si

$$(III-7) \quad \Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{2a}.$$

L'intervalle Δx étant choisi, cette relation fixe l'époque $t_2 = t_1 + \Delta t$ à laquelle la courbe des températures passe par $A_2, B_2, C_2 \dots$

En pratique, on choisit souvent à priori la valeur de l'intervalle Δt , par exemple un mois s'il s'agit d'un phénomène se déroulant sur une ou plusieurs années, et l'on en déduit la largeur des intervalles Δx

$$(III-8) \quad \Delta x = \sqrt{2a\Delta t}.$$

Par exemple, si

$$a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h} = 960 \text{ cm}^2/\text{j.}$$

et

$$t = 1 \text{ mois} = 30 \text{ jours}$$

$$\Delta x = \sqrt{2.960.30} = 240 \text{ cm.}$$

III - 3. REFROIDISSEMENT D'UN CYLINDRE INFINIMENT LONG PLONGÉ BRUSQUEMENT DANS UN MILIEU A TEMPÉRATURE INFÉRIEURE, CONSTANTE

Un cylindre de longueur infinie, de rayon R , à température initiale uniforme 1°C , dont la surface extérieure est refroidie brusquement à 0° à l'origine des temps puis maintenue à cette température, se refroidit progressivement à l'intérieur ; la tempé-

rature en un point quelconque à distance r de l'axe est donné à tout instant par la formule ⁽¹⁰⁾

$$(III-9) \quad \theta_{(r,t)}^* = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n J_0 \left(\beta_n \frac{r}{R} \right) e^{-p_n t}$$

où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre zéro,
 $\beta_n =$ racine de l'équation $J_0(\beta) = 0$

$$A_n = \frac{2}{\beta_n J_1(\beta_n)}, \text{ où } J_1 \text{ est la fonction de Bessel d'ordre 1.}$$

$$p_n = \frac{\lambda \beta_n^2}{c\gamma R^2} = a \frac{\beta_n^2}{R^2}.$$

⁽¹⁰⁾ Formule que l'on trouve dans divers ouvrages, en particulier dans la *Théorie de l'élasticité* de TIMOSHENKO, édition française de 1936, page 395.

Cylindre

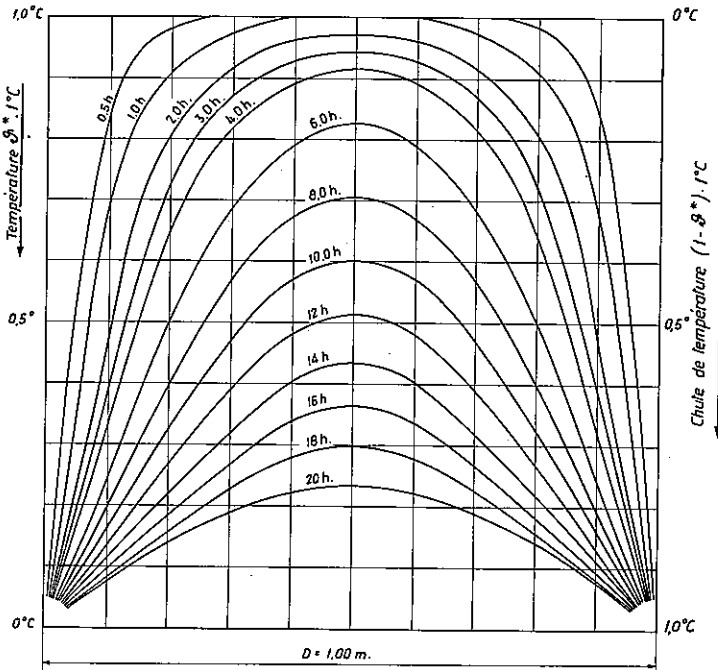


FIG. III-3. — Etats thermiques successifs d'un cylindre en béton de 1,00 m de diamètre, dont la surface subit, à l'origine des temps, une chute de température de 1°C. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Les termes en β_n , et par conséquent A_n , sont indépendants de la nature de la matière, dont les propriétés physiques n'interviennent que dans le coefficient p_n .

Dans un cylindre dont la température superficielle est abaissée brusquement de θ_i à θ_f , la température en un point quelconque à distance r de l'axe vaut à l'instant t :

$$(III-10) \quad \theta_{(r,t)} = \theta_f + (\theta_i - \theta_f) \theta^*$$

La figure III-3 indique les états thermiques successifs d'un cylindre de béton de 1 mètre de diamètre, initialement à la température de $+1^\circ\text{C}$, et dont la surface a été refroidie brusquement à 0° , le coefficient de diffusivité étant $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Les règles de similitude indiquées au chapitre premier permettent d'appliquer aussi ce graphique au calcul d'un cylindre de diamètre quelconque, formé d'une autre matière que le béton envisagé ici, comme on l'a montré au paragraphe précédent pour le cas du mur plan.

III - 4. REFROIDISSEMENT D'UNE SPHÈRE PLONGÉE BRUSQUEMENT DANS UN MILIEU A TEMPÉRATURE INFÉRIEURE, CONSTANTE

Si, à l'origine des temps, on abaisse brusquement à 0°C la surface d'une sphère de rayon R , dont la température initiale était uniformément égale à 1° , la température en un point quelconque de la sphère, à distance $r = \rho R$ du centre, est donnée à tout instant par la formule

$$(III-11) \quad \theta_{(\rho,t)}^* = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{2 \sin n\pi\rho}{\pi\rho} e^{-\frac{n^2\pi^2at}{R^2}}$$

où n représente un nombre entier, positif.

Cette formule ne se trouvant pas aussi couramment que les précédentes dans la littérature, nous en donnerons la démonstration :

La symétrie de la sphère conduit tout naturellement à choisir la forme (I-3) de l'équation générale :

$$(I-3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]$$

où r désigne la distance d'un point quelconque par rapport au centre de la sphère.

Introduisons les valeurs relatives

$$(III-12) \quad \begin{cases} \rho = \frac{r}{R} = \text{distance relative,} \\ z = \frac{a}{R^2} t = \text{temps relatif,} \end{cases}$$

et posons, pour simplifier l'écriture

$$(III-13) \quad s = \theta^*.$$

L'équation (I-3) s'écrit alors

$$(III-14) \quad \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial^2 s}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial s}{\partial \rho}.$$

Remarquons que

$$(III-15) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} (s \cdot \rho) = \frac{\rho \partial s}{\partial \rho} + s \\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (s \cdot \rho) = \rho \frac{\partial^2 s}{\partial \rho^2} + 2 \frac{\partial s}{\partial \rho} \end{cases}$$

on a

$$(III-16) \quad \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 (s \cdot \rho)}{\partial \rho^2}$$

$$(III-16') \quad \frac{\rho \partial s}{\partial z} = \frac{\partial^2 (s \cdot \rho)}{\partial \rho^2}.$$

Si l'on pose

$$u = s \cdot \rho$$

en remarquant que ρ est indépendant de t , donc de z :

$$(III-17) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial z} \rho = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}.$$

Les conditions initiales et finales deviennent :

$$\begin{aligned} u &= \rho & \text{pour } z &= 0 \\ u &= 0 & \text{pour } z &= \infty \end{aligned}$$

et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \text{à la surface : } & u = 0 & \text{pour } \rho &= 1 & z > 0 \\ \text{au centre : } & u = 0 & \text{pour } \rho &= 0 & z \geq 0 \text{ (car } u = \rho \cdot s \text{).} \end{aligned}$$

La solution de (III-17) est de la forme

$$(III-18) \quad u = P(\rho) \cdot Z(z)$$

c'est-à-dire un produit de deux fonctions, l'une dépendant de l'espace, l'autre du temps.

$$(III-19) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = P \frac{\partial Z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = Z \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}$$

L'équation (III-17) devient

$$(III-17') \quad P \frac{\partial Z}{\partial z} = Z \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \quad \text{ou}$$

$$(III-17'') \quad \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}$$

Les deux membres de cette équation étant fonctions de deux variables totalement indépendantes, l'égalité ne peut avoir lieu que si ces deux expressions sont égales à une même constante, que nous appellerons — Ψ^2 .

Chaque membre peut être intégré séparément

$$(III-20) \quad \frac{\partial Z}{\partial z} + \Psi^2 Z = 0$$

$$(III-21) \quad Z = A e^{-\Psi^2 z}$$

(On reconnaît que l'exposant doit être en effet négatif, puisque pour $z = \infty$, $u = P \cdot Z = 0$)

D'autre part

$$(III-22) \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} + \Psi^2 P = 0$$

$$(III-23) \quad P = B \cos \Psi \rho + C \sin \Psi \rho$$

Or pour $\rho = 0$, $u = 0$ quel que soit z , donc $P = 0$ au centre.
 Il s'ensuit que $B = 0$.

$$(III-23') \quad P = C \sin \Psi \rho \quad \text{avec} \quad \Psi = n\pi$$

où n est un nombre entier, positif.

Toute combinaison de ces solutions est aussi solution de l'équation (III-17''), donc

$$(III-24) \quad u = P.Z = \sum_{n=1}^{n=\infty} D_n (\sin n\pi\rho) e^{-n^2\pi^2z} = s.\rho$$

La condition initiale, pour $z = 0$, devient

$$u = \rho = \sum D_n \sin n\pi\rho.$$

Sphère

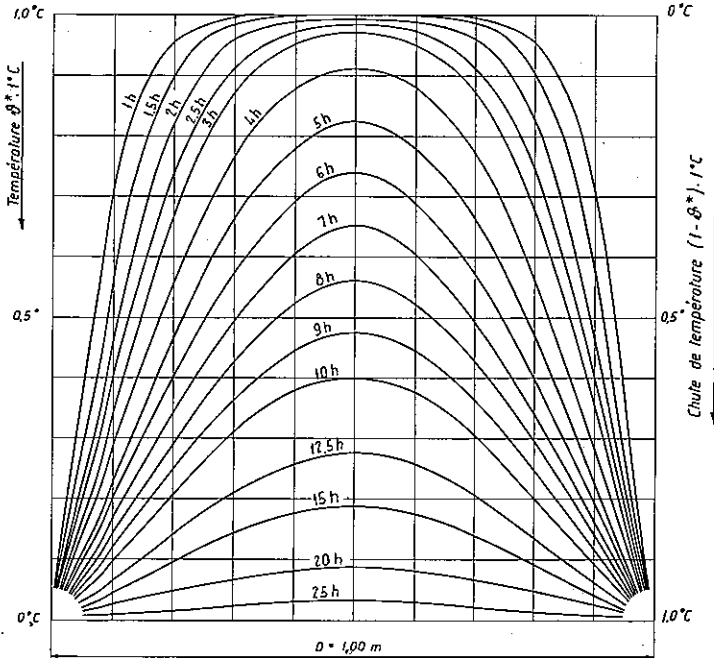


FIG. III-4. — Etats thermiques successifs d'une sphère en béton de 1,00 m de diamètre, dont la surface subit, à l'origine des temps, une chute de température de 1°C . Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Les constantes D_n sont les coefficients de Fourier de la fonction ρ

$$(III-25) \quad D_n = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

Finalement

$$(III-11') \quad \theta_{(\rho, z)}^* = s(\rho, z) = \frac{u}{\rho} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{2 \sin n\pi\rho}{\pi\rho} e^{-n^2\pi^2 z}$$

ce qui démontre la formule (III-11), puisque $z = \frac{a}{R^2} t$.

Pour $\rho = 0$, c'est-à-dire au centre de la sphère

$$(III-26) \quad \theta_{(0,0)}^* = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} 2e^{-\frac{n^2\pi^2 at}{R^2}}.$$

La température en tout point de la sphère à différentes époques est donnée par la figure III-4. Ce graphique, établi pour une sphère en béton de 1,00 m de diamètre, s'étend sans difficulté, comme les précédents, à des sphères de n'importe quel diamètre ou formées d'autres matériaux.

III - 5. ÉVOLUTION DE LA TEMPÉRATURE MOYENNE DES MURS, CYLINDRES ET SPHÈRES

Les problèmes qui se posent au constructeur de barrages, comme le calcul du mouvement probable des joints de dilatation, par exemple, exigent le plus souvent la connaissance de la *température moyenne* des différents blocs de béton qui forment l'ouvrage, plutôt que la température en chaque point. Pour le mur, il est facile de calculer la température moyenne par planimétrage du graphique III-1; de même, pour le cylindre, on peut planimétrer le graphique III-3 et appliquer le théorème de Guldin. Pour la sphère, il est plus simple de procéder analytiquement, en intégrant l'équation (III-11). On trouve facilement, pour une sphère dont la surface a passé de 1° à 0° C :

$$\bar{\theta}(R, t) = \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\frac{n^2\pi^2 at}{R^2}} \int_{r=0}^{r=R} \frac{2 \sin n\pi\rho}{\pi\rho} \cdot 4\pi r^2 dr$$

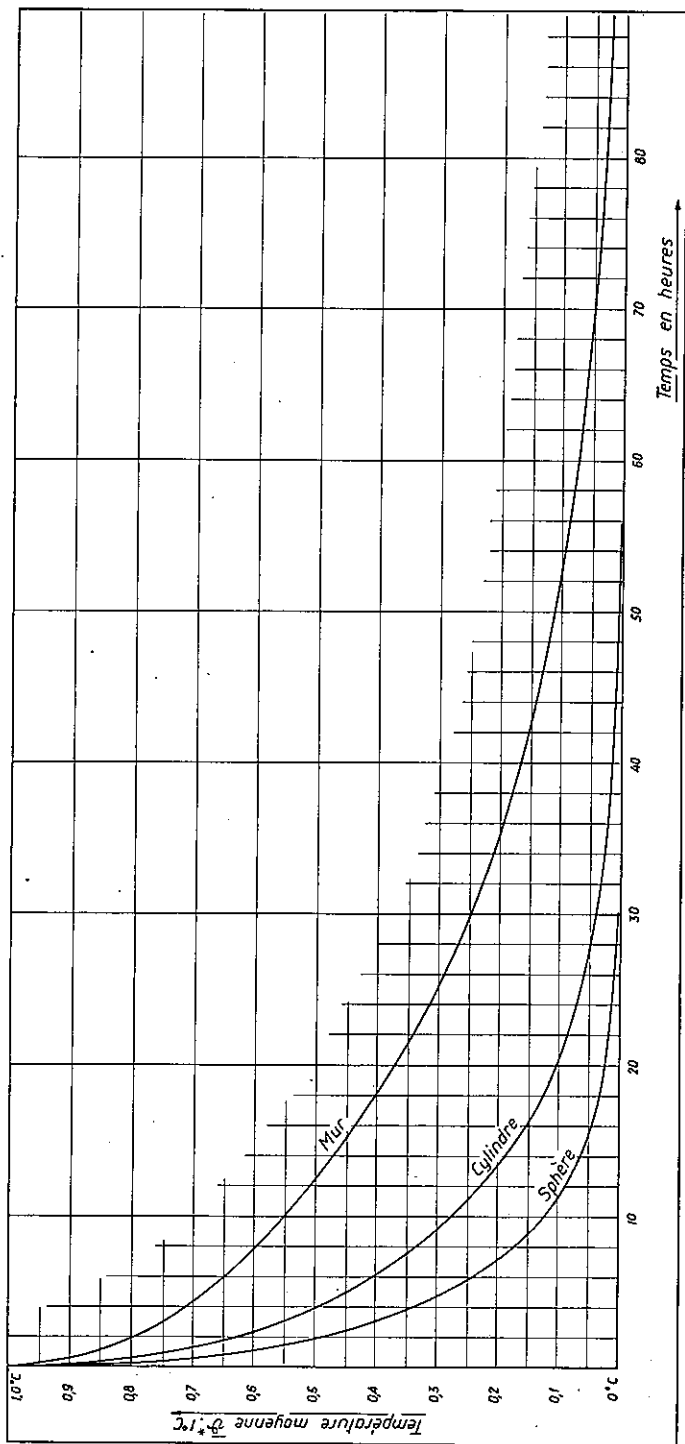


FIG. III-5. — Evolution de la température moyenne d'un mur, d'un cylindre et d'une sphère en béton de 1,00 m de largeur, dont la surface subit, à l'origine des temps, une chute de température de 1°C à 0°C. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

$$(III-27) \quad \bar{\theta}(R, t) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2\pi^2at}{R^2}}.$$

La figure III-5 représente l'évolution de la température moyenne d'un mur de 1,00 m de largeur, ainsi que d'un cylindre et d'une sphère de 1,00 m de diamètre.

III - 6. ÉVOLUTION DE LA TEMPÉRATURE MOYENNE DE PARALLÉLIPÈDES PLACÉS BRUSQUEMENT DANS UN MILIEU A TEMPÉRATURE INFÉRIEURE, CONSTANTE

Pour une première approximation de l'évolution thermique, et en particulier de la température moyenne, il est en général suffisant d'assimiler les corps réels à des parois, des cylindres ou des sphères ; nous verrons plus loin (§ III-9) comment il convient de définir le diamètre du cylindre thermiquement équivalent à un prisme polygonal. Les blocs de bétonnage d'un barrage affectent cependant une forme plus proche des polyèdres que des corps de révolution, et si l'on veut tenir compte plus exactement de l'influence de la déperdition de chaleur par la face supérieure et par les angles, on est conduit à envisager en deuxième approximation des parallélépipèdes plus ou moins larges et plus ou moins hauts.

Le problème général de l'évolution thermique de parallélépipèdes d'arêtes l , m , n , à température initiale $\theta_i = f(x, y, z)$ placés dans un milieu à température constante θ_f , a été résolu, entre autres, par Carslaw⁽¹¹⁾. La température locale, dépendant des trois coordonnées x , y et z du point considéré, et non plus d'une seule, x ou r , comme dans le cas de murs, de cylindres ou de sphères, il n'est plus possible de la représenter par un seul graphique semblable aux figures III-1, III-3 et III-4. Mais pour les problèmes qui le préoccupent, l'ingénieur aura généralement une image suffisante de l'état thermique s'il connaît la température moyenne $\bar{\theta}$ et la température θ_{centre} au point milieu du corps, celle de la surface étant donnée par avance.

(11) CARSLAW : *Conduction of heat in solids*. Dover, 1945, page 108.

Si l'on admet qu'à l'origine des temps, le corps était à une température uniforme θ_i , on obtient à partir des formules générales de Carslaw :

Au centre :

(III-28)

$$\theta_{\text{centre}} = \theta_f + (\theta_i - \theta_f) \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+q+r}}{(2p+1)(2q+1)(2r+1)} e^{-a^2 \pi^2 S_{pqr} t}$$

En moyenne :

(III-29)

$$\bar{\theta} = \theta_f + (\theta_i - \theta_f) \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^3 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 (2q+1)^2 (2r+1)^2} e^{-a^2 \pi^2 S_{pqr} t}$$

où
$$S_{pqr} = \frac{(2p+1)^2}{l^2} + \frac{(2q+1)^2}{m^2} + \frac{(2r+1)^2}{n^2}$$

l, m, n étant les longueurs des arêtes du parallélépipède.

Un prisme est un parallélépipède dont l'une des arêtes, n par exemple, est infinie. Les formules ci-dessus ne permettent toutefois pas de passer directement à la limite ; il faut opérer tout d'abord une translation de l'origine des coordonnées au point $\left(0, 0, \frac{n}{2}\right)$. Le passage à la limite donne alors :

Au centre du prisme :

(III-30)
$$\theta_{\text{centre}} = \theta_f + (\theta_i - \theta_f) \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+q}}{(2p+1)(2q+1)} e^{-a^2 \pi^2 S_{pq} t}$$

(III-30')
$$\theta_{\text{centre}} = \theta_f + (\theta_i - \theta_f) \theta_{\text{centre}}^*$$

En moyenne :

(III-31)
$$\bar{\theta} = \theta_f + (\theta_i - \theta_f) \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 (2q+1)^2} e^{-a^2 \pi^2 S_{pq} t}$$

où
$$S_{pq} = \frac{(2p+1)^2}{l^2} + \frac{(2q+1)^2}{m^2}$$

Les figures III-6 et III-7 donnent la température au centre et la moyenne pour des parallélépipèdes et des prismes de différentes dimensions, en fonction du temps, pour une chute de température extérieure de 1° C.

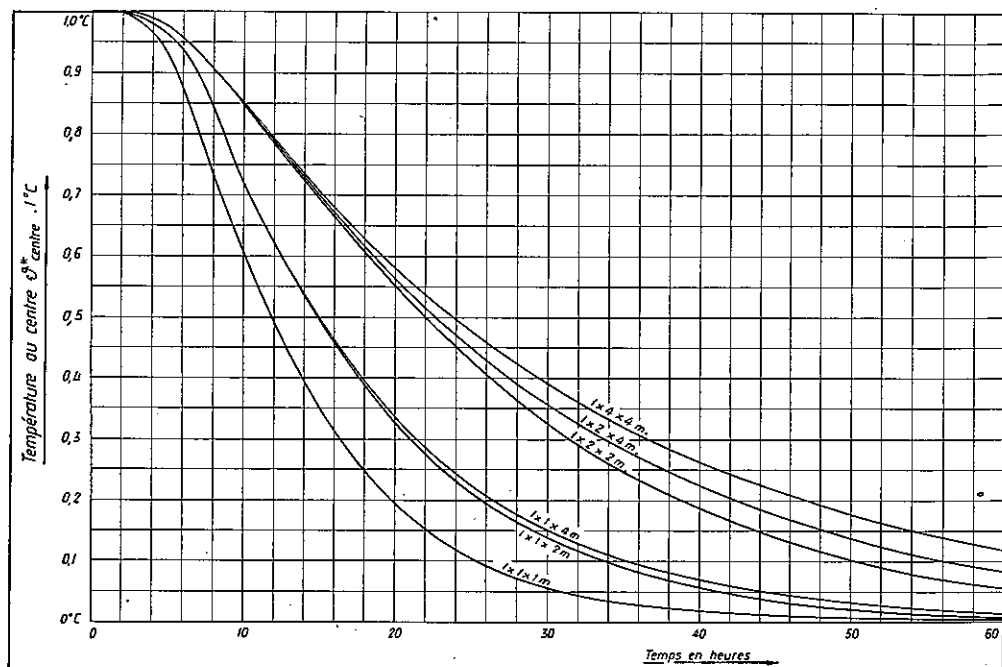


FIG. III-6. — Température au centre de prismes en béton dont la surface subit, à l'origine des temps, une chute de température de 1°C à 0°C . Diffusivité: $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

On verrait par un calcul que la température au centre d'un prisme est pratiquement égale à celle d'un parallépipède dont la hauteur est égale au quadruple de la plus petite dimension. Comme le montre la figure III-7, ce n'est pas le cas pour la température moyenne, ce qui se conçoit aisément.

III - 7. REFROIDISSEMENT D'UN MUR PLACÉ DANS UN MILIEU DONT LA TEMPÉRATURE VARIE SINUSOÏDALEMENT

On a donné au paragraphe III-2 le calcul du refroidissement d'une paroi placée brusquement dans un milieu à température inférieure, constante. Ce calcul peut suffire dans certains cas, tout au moins comme première approximation, par exemple lorsqu'on veut étudier

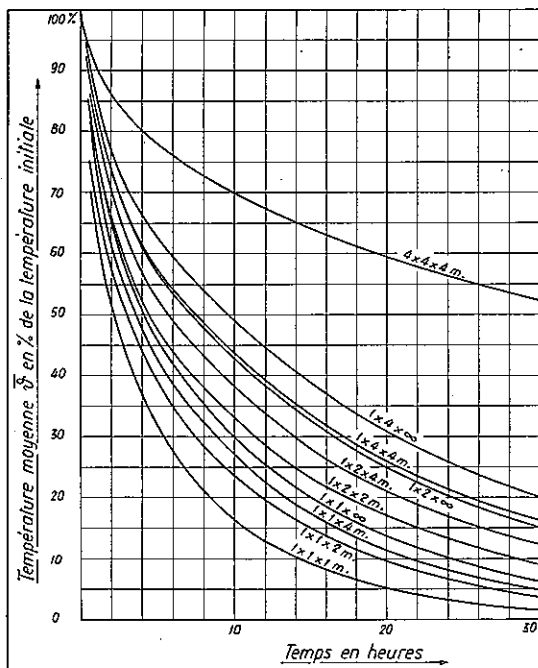


Fig. III-7. — Température moyenne de prismes en béton dont la surface subit, à l'origine des temps, une chute de température de 1°C à 0°C . Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

le phénomène pendant une durée assez courte, de l'ordre de quelques semaines, pendant laquelle on peut admettre sans grande erreur que la température extérieure ne varie pas. Mais les blocs d'un barrage de dimensions usuelles mettent plusieurs mois, souvent même plusieurs années, pour perdre leur chaleur de prise ; si l'on veut suivre leur évolution thermique pendant cette période, on ne peut plus négliger le fait qu'au cours de l'année, la température extérieure varie de façon approximativement sinusoïdale.

La question qui se pose généralement est de déterminer l'ouverture des joints de contraction ou de choisir l'époque de l'injection des joints de travail ou celle du clavage d'un arc. Il suffit alors de connaître l'évolution de la température moyenne du mur.

Du point de vue mathématique, on a affaire à un mur illimité, d'épaisseur L ; à température initiale uniforme $\bar{\theta}_{b_0}$, placé dans un milieu dont la température varie selon la loi

$$(III-32) \quad \theta_a = \bar{\theta}_a + A_a \cos(\omega t + \varphi).$$

Il s'agit d'intégrer l'équation générale

$$(I-4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

pour $0 < x < L$ avec les conditions aux limites

$$(III-33) \quad \begin{cases} \theta(x, 0) = \bar{\theta}_{b_0} \\ \theta(0, t) = \theta(L, t) = \bar{\theta}_a + A_a \cos(\omega t + \varphi). \end{cases}$$

La température moyenne à un instant quelconque t est donnée par l'équation

$$(III-34) \quad \bar{\theta}(t) = \bar{\theta}_a + A_a [(A' - B') \cos \varphi - (A'' - B'') \sin \varphi] + (\bar{\theta}_{b_0} - \bar{\theta}_a) C$$

où A' , A'' , B' , B'' et C sont des fonctions du temps.

La fonction

$$(III-35) \quad \bar{\theta}_a + A_a (A' \cos \varphi - A'' \sin \varphi)$$

représente la température moyenne du béton à un instant quelconque en régime permanent, c'est-à-dire lorsque l'influence de la température initiale $\bar{\theta}_{b_0}$ s'est suffisamment atténuée. En appelant A'_0 et A''_0 les valeurs initiales de A' et A'' au temps $t = 0$, on a au temps t :

$$\begin{aligned} A' &= A'_0 \cos \omega t - A''_0 \sin \omega t \\ A'' &= A'_0 \sin \omega t + A''_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(III-36) \quad A'_0 = A \cos \beta, \quad \text{et} \quad A''_0 = A \sin \beta$$

on obtient

$$(III-36') \quad \begin{aligned} A' &= A \cos(\omega t + \beta) \\ A'' &= A \sin(\omega t + \beta) \\ A' \cos \varphi - A'' \sin \varphi &= A \cos(\omega t + \varphi + \beta). \end{aligned}$$

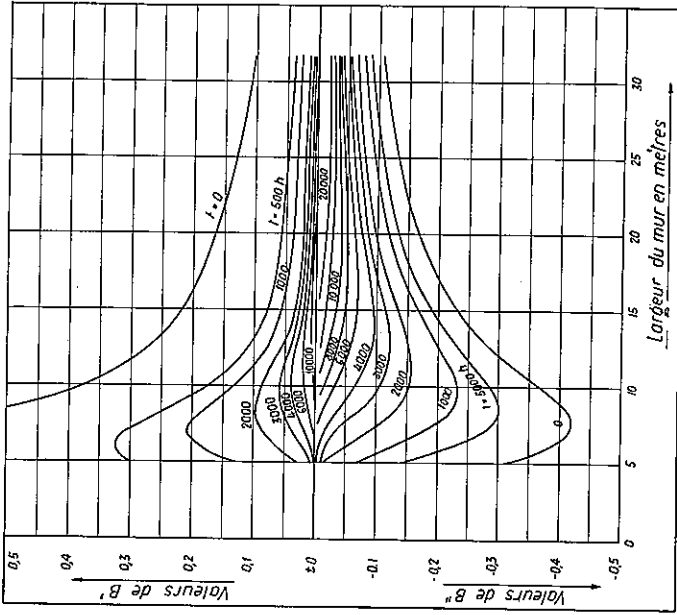
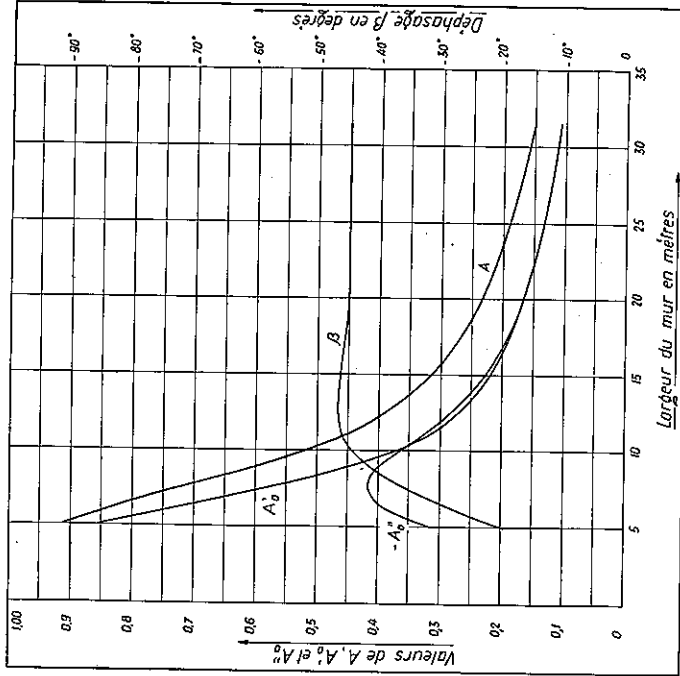


Fig. III-8. — Refroidissement naturel de murs en béton placés dans un milieu dont la température varie sinusoidalement au cours du temps.

Coefficients A, β et B des équations (III-34) et (III-36).

Diffusité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$

Ainsi, A et β représentent l'amplitude relative et le déphasage de la température moyenne du béton par rapport à l'amplitude et à la phase des variations de la température extérieure, en régime permanent.

En ajoutant à (III-35) les termes en B' et B'' , qui décroissent d'ailleurs rapidement, on obtient la température moyenne dans l'état transitoire, à partir d'un mur dont la température initiale, au temps $t = 0$, serait égale à la moyenne $\bar{\theta}_a$ de l'air. Les valeurs numériques des coefficients A et B sont données par la figure III-8 pour une diffusivité $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

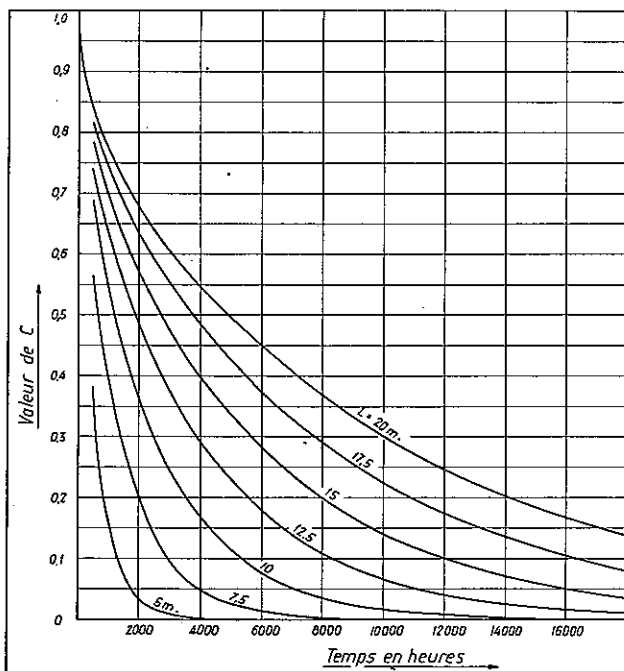


FIG. III-9. — Refroidissement naturel de murs en béton placés dans un milieu dont la température varie sinusoidalement au cours du temps.

Coefficient C de l'équation (III-34)

(Ce coefficient représente aussi l'évolution de la température moyenne de murs placés brusquement dans un milieu à température inférieure, maintenue constante)

Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Le terme C , enfin, représente l'effet de la différence entre la température initiale du béton et la température moyenne de l'air. Ses valeurs numériques sont données par la figure III-9, qui représente donc l'évolution de la température moyenne de murs de différentes épaisseurs placés brusquement dans un milieu à température inférieure, constante. Les courbes de cette figure sont semblables à celle de la figure III-5 relative à un mur de 1,00 m d'épaisseur.

Quelques exemples numériques sont donnés au paragraphe III-10 et illustrés par les figures III-14 et III-15.

III - 8. REFROIDISSEMENT D'UN CYLINDRE DE LONGUEUR INFINIE, PLACÉ DANS UN MILIEU DONT LA TEMPÉRATURE VARIE SINUSOÏDALEMENT

La solution de ce problème est analogue à celle du précédent. On partira dans ce cas de l'équation générale sous la forme

$$(I-2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

qu'il s'agit d'intégrer pour

$$0 < r < R \quad \text{et} \quad t > 0$$

compte tenu des conditions aux limites

$$(III-37) \quad \begin{cases} \theta(r, 0) = \bar{\theta}_{bo} \\ \theta(R, t) = \bar{\theta}_a + A_a \cos \omega t + \varphi. \end{cases}$$

Le température moyenne du cylindre à un instant quelconque est encore donnée par une équation semblable à (III-34)

$$(III-38) \quad \bar{\theta}(t) = \bar{\theta}_a + A_a [(A' - B') \cos \varphi - (A'' - B'') \sin \varphi] + (\bar{\theta}_{bo} - \bar{\theta}_a) C$$

mais les coefficients A , B et C prennent alors les valeurs indiquées par les figures III-10 et III-11. Cette dernière figure représente l'évolution de la température moyenne de cylindres de différents diamètres placés brusquement dans un milieu à température inférieure, constante. A l'échelle près, ces courbes sont semblables à celle de la figure III-5 relative à un cylindre de 1,00 m de diamètre.

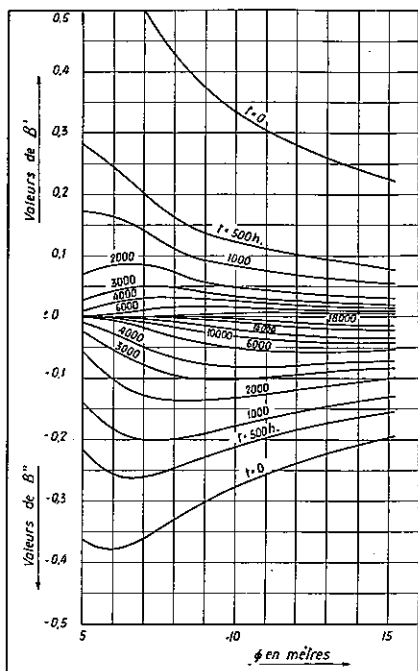
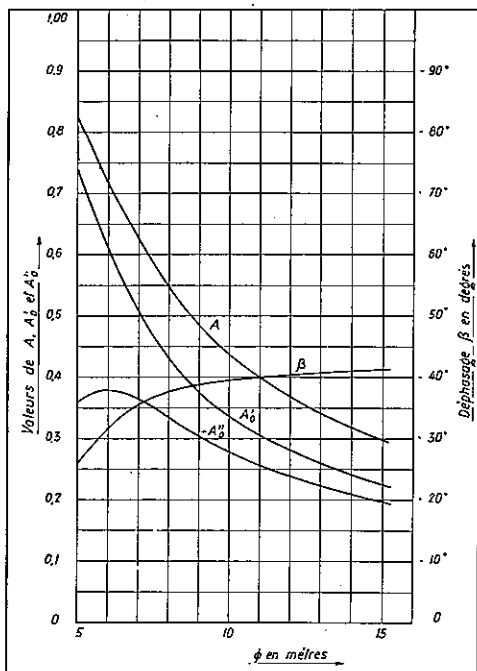


FIG. III-10. — Refroidissement naturel de cylindres en béton placés dans un milieu dont la température varie sinusoïdalement au cours du temps

Coefficients A et B de l'équation (III-38)

$$A' = A \cos(\omega t + \beta) ; \quad A'' = A \sin(\omega t + \beta)$$

Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

III - 9. REFROIDISSEMENT DE CORPS PRISMATIQUES DE SECTION QUELCONQUE. CYLINDRES ÉQUIVALENTS

Les corps auxquels on a affaire en pratique, surtout lorsqu'il s'agit de barrages, ont rarement une section rectangulaire ou circulaire. Les voussoirs d'un barrage-voûte, par exemple, sont généralement des corps prismatiques à section trapézoïdale, dont la surface peut être plus ou moins compliquée par la présence de puits et galeries à cheval sur les surfaces de contact entre deux blocs. Il est commode de les assimiler à des cylindres circulaires, de diamètre convenablement choisi.

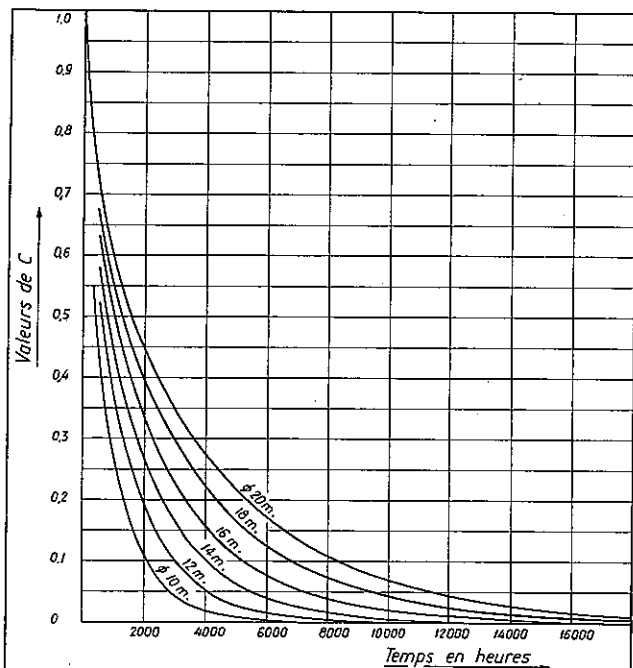


FIG. III-11. — Refroidissement naturel de cylindres en béton placés dans un milieu dont la température varie sinusoïdalement au cours du temps.

Coefficient C de l'équation (III-38)

(Ce coefficient représente aussi l'évolution de la température moyenne de cylindres placés brusquement dans un milieu à température inférieure, maintenue constante.)

Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Les échanges de chaleur dépendent à la fois de la masse du corps et de sa surface, c'est-à-dire, pour des prismes, de l'aire et du périmètre de la section droite. En particulier, si l'on considère la variation de la température moyenne, pour les petites valeurs du temps, la chaleur échangée est proportionnelle au périmètre \mathcal{P} , donc la variation de température moyenne est proportionnelle au rapport $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{A}}$, \mathcal{A} étant l'aire de la section. Il vient naturellement à l'idée qu'un prisme et un cylindre circulaire pourront être considérés comme thermiquement équivalents si leurs sections présentent la

même valeur du rapport $\frac{\text{aire}}{\text{périmètre}} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \mathfrak{R}$, que nous appellerons « rayon thermique » par analogie au « rayon hydraulique » bien connu des ingénieurs. On posera donc

$$(III-39) \quad \mathfrak{R}_{\text{prisme}} = \mathfrak{R}_{\text{cylindre}}.$$

Cette approximation est surtout licite pour les faibles valeurs du temps.

Elle peut être améliorée pour les grandes valeurs du temps : lorsqu'un corps quelconque se refroidit, sa température moyenne peut être représentée par une série de la forme

$$(III-40) \quad \bar{\theta} = \sum a_k e^{-p_k t}$$

où les exposants p_k forment une suite positive et croissante. Le premier terme de cette série devenant rapidement prépondérant, on peut considérer comme équivalentes deux sections pour lesquelles l'exposant p_1 prend la même valeur. Cet exposant p_1 a été calculé, soit par des méthodes exactes dans certains cas, soit par des méthodes approchées dans d'autres cas.⁽¹²⁾ On constate en pratique que pour des sections de forme assez régulière et pas trop allongées, le produit

$$(III-41) \quad \Lambda = p_1 \mathfrak{R}$$

varie peu d'une forme à l'autre. Il prend en effet les valeurs suivantes :

Cercle	$\Lambda = 1,2024$
Carré	1,1107
Rectangle de côtés $a \times b$	$1,5708 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}$
	$1,1107 \leq \Lambda \leq 1,5708$
Demi-cercle	1,1706
Triangle équilatéral	1,0472
Triangle 90°, 45°, 45°	1,0288
Triangle 90°, 60°, 30°	1,0141
Ellipse très aplatie	1,2337

⁽¹²⁾ Voir l'ouvrage de G. POLYA et G. SZEGÖ : *Isoperimetric Inequalities in mathematical Physics*, Princeton University Press, 1951.

Application des critères d'équivalence de prismes et cylindres

Forme de la section	Rayon thermique \mathfrak{R}	1 ^{er} critère (III-39)		Facteur de correction $\frac{\Lambda_c}{\Lambda_p}$	2 ^e critère (III-42)	
		\varnothing du cylindre de même \mathfrak{R} que le prisme			\varnothing du cylindre équivalent au prisme	
Cercle	$\frac{R}{2}$	$2R$	1,000		$2R$	
Carré de côtés a	$\frac{a}{4}$	a	1,0825		$1,083 a$	
Rectangle de côtés a et b	$\frac{ab}{2(a+b)}$	$\frac{2ab}{a+b}$	$0,7654 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$		$\frac{1,531 ab\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)^2}$	
Demi-cercle	$\frac{\pi R}{2\pi+4} = 0,3055 R$	$1,222 R$	$1,0271$	$1,0825 > \frac{\Lambda_c}{\Lambda_p} > 0,7654$	$1,255 R$	
Triangle équilatéral de côtés a	$0,1443 a$	$0,577 a$	$1,4482$		$0,663 a$	
Triangle 90°, 45°, 45° de côtés a	$\frac{a}{2(2+\sqrt{2})} = 0,1464 a$	$0,585 a$	$1,1687$		$0,684 a$	
Triangle 90°, 60°, 30° grand côté = a petit côté = b	$\frac{ab}{2(a+3b)}$	$\frac{2ab}{a+3b}$	$1,1856$		$\frac{2,371 ab}{a+3b}$	
Ellipse aplatie	$\approx \frac{\pi ab}{a+b+3\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{12,566 ab}{a+b+3\sqrt{a^2+b^2}}$	$0,9746$		$\frac{12,248 ab}{a+b+3\sqrt{a^2+b^2}}$	

Le fait que Λ est à peu près constant signifie que deux sections ayant même rayon thermique \mathfrak{R} auront aussi à peu près même exposant p_1 . Les deux critères d'équivalence doivent ainsi conduire à des résultats peu différents.

Si l'on veut donc établir, entre un prisme et un cylindre de section circulaire, une correspondance meilleure que celle de la simple égalité des rayons thermiques \mathfrak{R} , on choisira le cylindre de telle façon qu'il ait le même exposant p_1 , que celui du prisme. Il suffit pour cela de réaliser l'égalité

$$(III-42) \quad \frac{\mathfrak{R}_c}{\Lambda_c} = \frac{\mathfrak{R}_p}{\Lambda_p}$$

$$\text{ou} \quad \mathfrak{R}_c = \frac{\Lambda_c}{\Lambda_p} \mathfrak{R}_p$$

ce qui revient à multiplier le rayon thermique du prisme par le facteur de correction $\frac{\Lambda_c}{\Lambda_p}$ (l'indice p signifie prisme et l'indice c , cylindre circulaire).

Le tableau de la page 73 indique comment calculer le diamètre du cylindre équivalent à un prisme donné, selon le critère choisi.

La figure III-12 permet de comparer les courbes de refroidissement calculées pour des prismes de $15 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ et $15 \text{ m} \times 50 \text{ m}$, avec celles des cylindres considérés comme équivalents, selon les deux critères définis ci-dessus. On constate que pour ces rectangles, dont les côtés passent du rapport $1 : 1$ à $1 : 3^{1/3}$, l'approximation reste satisfaisante ; elle est meilleure selon le second critère et particulièrement bonne, dans ce cas, pour les grandes valeurs du temps. On voit toutefois que, à défaut de connaître les valeurs du coefficient Λ données plus haut, on peut obtenir un résultat encore acceptable en choisissant simplement un cylindre circulaire de même rayon thermique que celui du prisme. Mais on remarquera qu'il n'est pas possible de dire a priori dans quel sens se produira l'erreur commise, ce sens pouvant différer selon les proportions de la section et selon le critère adopté.

Enfin, la même figure III-12 permet de juger de l'influence de la déperdition de chaleur par les faces étroites du prisme : celui de

15 m × 50 m de section se comporte d'une façon déjà comparable à celle d'un mur infiniment long.

Si l'on cherchait à étendre la notion de cylindre équivalent jusqu'au cas limite du mur indéfini, on constaterait que l'erreur devient alors trop grande, quel que soit celui des deux critères d'équivalence choisis. (Les courbes correspondantes n'ont pas été reproduites sur la figure III-12 pour ne pas charger le dessin.)

En résumé, des prismes rectangulaires dont le rapport des côtés de la section est compris entre 1 et 5 peuvent être assimilés à des cylindres équivalents, dont le diamètre est indiqué dans la dernière colonne du tableau de la page 73. A défaut de ce tableau, on pourra se contenter

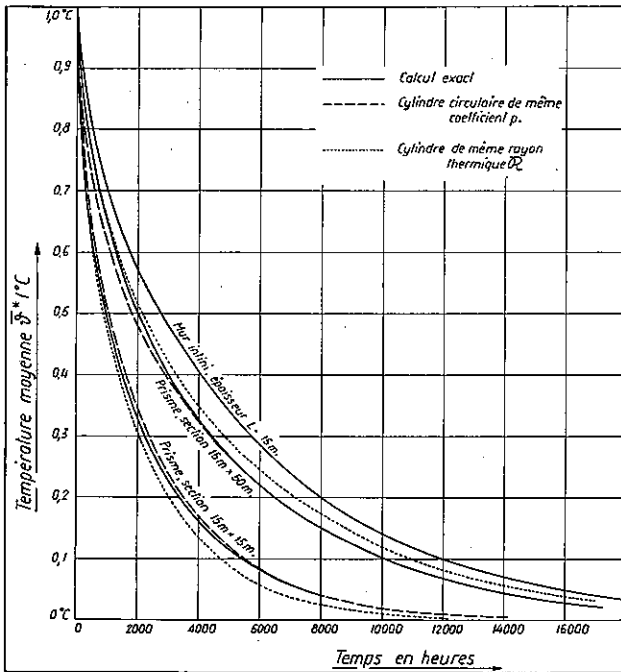


FIG. III-12. — Refroidissement naturel de prismes et de cylindres admis équivalents, dont la surface subit, à l'origine des temps, une chute de température de 1° C à 0° C. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

d'assimiler les prismes à des cylindres de même rayon thermique
 $\mathfrak{R} = \frac{\text{aire de la section}}{\text{périmètre}}$. Quand le rapport des côtés est supérieur à 5, le prisme peut être assimilé à un mur de surface infinie.

III - 10. REFROIDISSEMENT PAR LES FACES D'UN MUR PENDANT LA PÉRIODE DE DÉGAGEMENT INTERNE DE LA CHALEUR DE PRISE

Parfaitement isolé de l'extérieur, un massif de béton subirait pendant sa prise une élévation de température identique à celle que l'on mesure au laboratoire dans un calorimètre adiabatique (fig. III-13). On observerait aussi la même courbe d'échauffement au milieu d'une grosse masse. Lorsqu'il s'agit d'un mur d'épaisseur limitée en contact avec l'air ou avec un autre milieu, au fur et à mesure que le béton s'échauffe, une partie de la chaleur se dissipe par les faces ; la température moyenne du mur monte donc moins haut que celle du massif isolé, alors même que, si le mur est assez épais, sa température locale au centre est identique à celle du massif parfaitement isolé.

Le dégagement de chaleur interne n'est pas instantané, mais s'étale sur une période plus ou moins longue ; pour le ciment Portland, tel qu'on l'utilise généralement en Suisse pour la construction des barrages, la majeure partie, environ 85 à 90 %, de la chaleur de prise se dégage en l'espace de 5 à 7 jours. Le rythme des travaux est tel que tous les 4 à 5 jours aussi, une nouvelle couche de béton recouvre la précédente et interrompt sa libre déperdition de chaleur par la surface horizontale. Il est utile de se rendre compte de l'influence de cette déperdition pendant la période initiale, que nous avons supposée égale à 5 jours.

Par un calcul détaillé, dont la méthode est indiquée dans la note annexe, l'Institut de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique de Lausanne a déterminé la température moyenne de murs et de prismes de différentes dimensions, soumis à un dégagement de chaleur interne conforme à celui de la figure III-13 et placés dans de l'air à température constante, pendant 5 jours (il est

inutile de tenir compte de la variation de la température moyenne de l'air pendant cet intervalle, relativement court en regard des variations annuelles).

A la fin de la phase d'échauffement, admise ici égale à cinq jours, le massif de béton passe, sous l'effet simultané de l'échauffement interne et du refroidissement superficiel, par une certaine température moyenne $\bar{\theta}_m$. Si l'échauffement avait été instantané, le

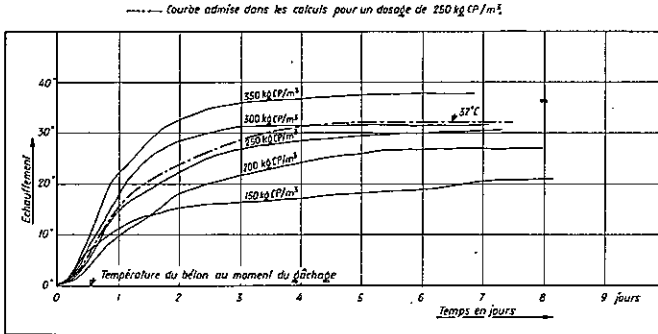


FIG. III-13. — Echauffement adiabatique de bétons de ciment Portland de différents dosages.

En trait mixte : courbe admise dans le calcul pour un dosage de 250 kg CP/m³

béton serait parti d'une température θ_0 uniforme (de 32° C dans l'hypothèse admise pour la loi d'échauffement adiabatique) ; il aurait aussi passé par la même température moyenne $\bar{\theta}_m$, mais à un autre âge. Le calcul exposé dans la note annexe de l'Institut de mathématiques appliquées de l'École polytechnique de l'Université de Lausanne, révèle que cet âge est de 3,5 jours au lieu de 5 ; autrement dit, si le béton part d'emblée de la température maximum d'échauffement adiabatique, son refroidissement *initial* est un peu plus rapide, et le refroidissement subséquent est en avance de 36 heures par rapport à celui d'un massif dont l'échauffement initial a duré 5 jours. Cette avance ne dépend pas de la forme ni des dimensions du massif ; elle ne dépend que de la loi de dégagement de la chaleur interne ; le chiffre de 36 heures est valable pour du ciment Portland ordinaire et, pour un dosage moyen, d'environ 250 kg CP/m³. Pour

les murs d'une certaine épaisseur, ce décalage n'a pas d'influence appréciable sur la température moyenne atteinte après quelques semaines.

Ou peut ainsi utiliser le graphique III-5 pour évaluer la température moyenne d'un mur quelconque à la fin de la phase d'échauffement. Supposons par exemple un mur de 4 m d'épaisseur (surépaisseur thermique comprise); sa température à l'âge de 5 jours dans les conditions réelles d'échauffement interne sera la même que celle d'un mur de même épaisseur, âgé de 3,5 jours dont la température interne aurait été portée instantanément à 32°. Elle est aussi la même que celle d'un mur de 1 m d'épaisseur, après une durée de refroidissement directement proportionnelle au carré de l'épaisseur, c'est-à-dire après $36 \left(\frac{1,0}{4,0}\right)^2 = \frac{36}{16} = 2,25$ heures.

On lit sur la figure III-5 que la température moyenne relative $\bar{\theta}^*$ est de 0,78, ce qui signifie qu'il reste à ce moment-là 78 % de la chaleur de prise dans le massif. La température moyenne est donc de $0,78 \times 32 = 25^\circ$ au-dessus de la température de gâchage.

S'il s'agit d'un prisme, on commencera par calculer le diamètre du cylindre équivalent, selon la règle donnée au paragraphe III-9. Soit par exemple à calculer la température moyenne à la fin de la phase d'échauffement, d'un prisme de 12×12 m.

Il est équivalent à un cylindre de $12 \times 1,083 = 12,98$ m de diamètre. A l'âge de 36 heures, ce cylindre passe par la même température qu'un cylindre de 1 m de diamètre âgé de $36 \left(\frac{1,0}{12,98}\right)^2 = 0,21$

heures. D'après la figure III-5, la température moyenne à la fin de la phase d'échauffement est de $0,88 \times 32^\circ = 28,2^\circ$ au-dessus de la température de gâchage.

En résumé, pour le calcul de l'évolution thermique de murs en béton de ciment Portland ordinaire d'un dosage de 200 à 300 kg CP/m³, on peut, à partir du cinquième jour, admettre que l'échauffement interne a eu lieu instantanément, à condition de soustraire 1 ½ jour à l'âge du béton.

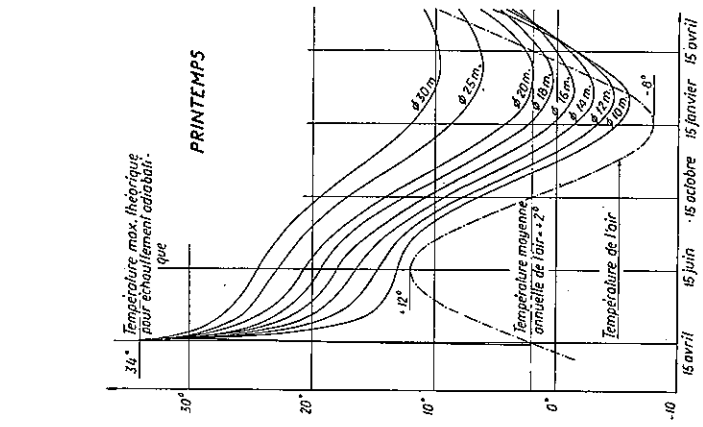
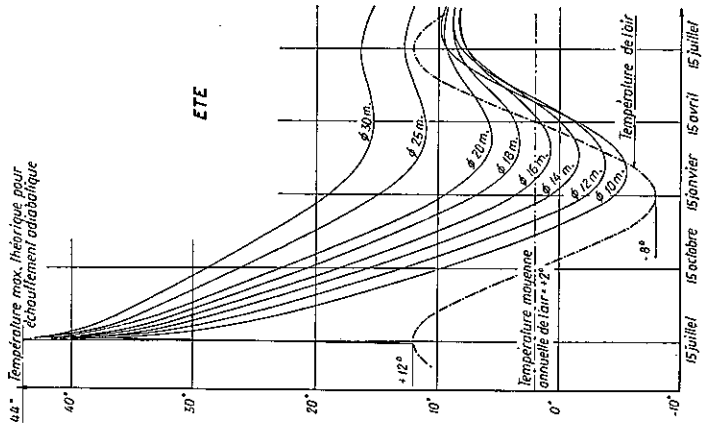
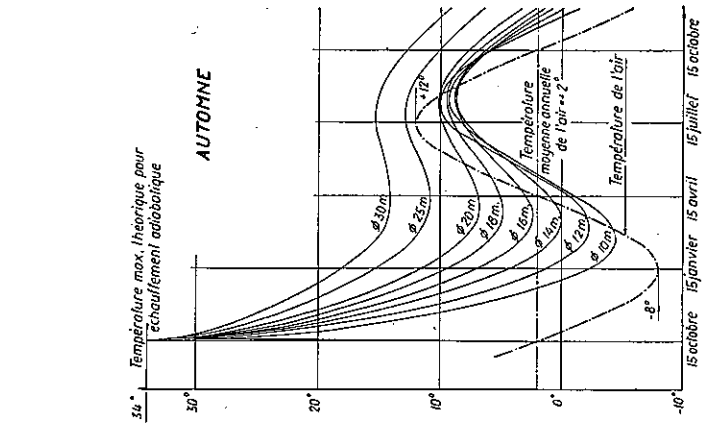
Il est à noter que ce décalage dans le temps ne joue d'ailleurs plus de rôle appréciable sur des bétons âgés de quelques semaines.

III - II. EXEMPLES DE REFROIDISSEMENT NATUREL DE MURS ET DE CYLINDRES EN BÉTON

Lorsqu'on établit le projet de construction d'un barrage, d'un barrage-voûte surtout, on est conduit, si l'on ne veut pas recourir à la réfrigération artificielle du béton, à subdiviser l'ouvrage en blocs ou voussoirs séparés les uns des autres, pour accélérer la dissipation naturelle de la chaleur de prise. Parfois, on commence par construire des voussoirs de 12 à 18 m de largeur, séparés par des brèches de clavage de 1,20 à 1,50 m, que l'on remplit quand les voussoirs se sont suffisamment refroidis et ont effectué la majeure partie de leur retrait. D'autres fois, la brèche occupe toute la largeur d'un voussoir ; c'est-à-dire que l'on construit d'abord un bloc sur deux, et l'on remplit les intervalles après un certain temps ; dans le premier cas, seul le béton des brèches étroites fait encore son retrait après le clavage du barrage, et les injections éventuelles des joints ne sont destinées qu'à parfaire la continuité de l'ouvrage. Dans le second cas, il faut compter sur une ouverture des joints de travail correspondant au retrait de tout un voussoir, et les injections sont généralement indispensables.

Dans un cas comme dans l'autre, le barrage se présente tout d'abord comme une série de tours juxtaposées, séparées par un intervalle plus ou moins large ; ces tours se refroidissent par leurs quatre faces (amont, aval et joints de clavage) ; on peut les assimiler à des cylindres thermiquement équivalents, selon la règle exposée au paragraphe III-9. Dans la deuxième phase, clavage des brèches ou construction des voussoirs intermédiaires, le nouveau béton, isolé latéralement par les voussoirs existants, se refroidit plutôt à la manière d'un mur, par ses faces amont et aval seulement. Ce mode de construction ne conviendra donc que pour des barrages relativement minces, qui se refroidissent assez rapidement par deux faces seulement. Pour un barrage épais, on devra recourir aux brèches étroites et il s'agit alors de choisir la largeur des voussoirs de telle sorte que le refroidissement soit suffisant au moment du clavage.

Dans les calculs thermiques, on est donc conduit à considérer en principe deux sortes de corps, des murs et des cylindres.



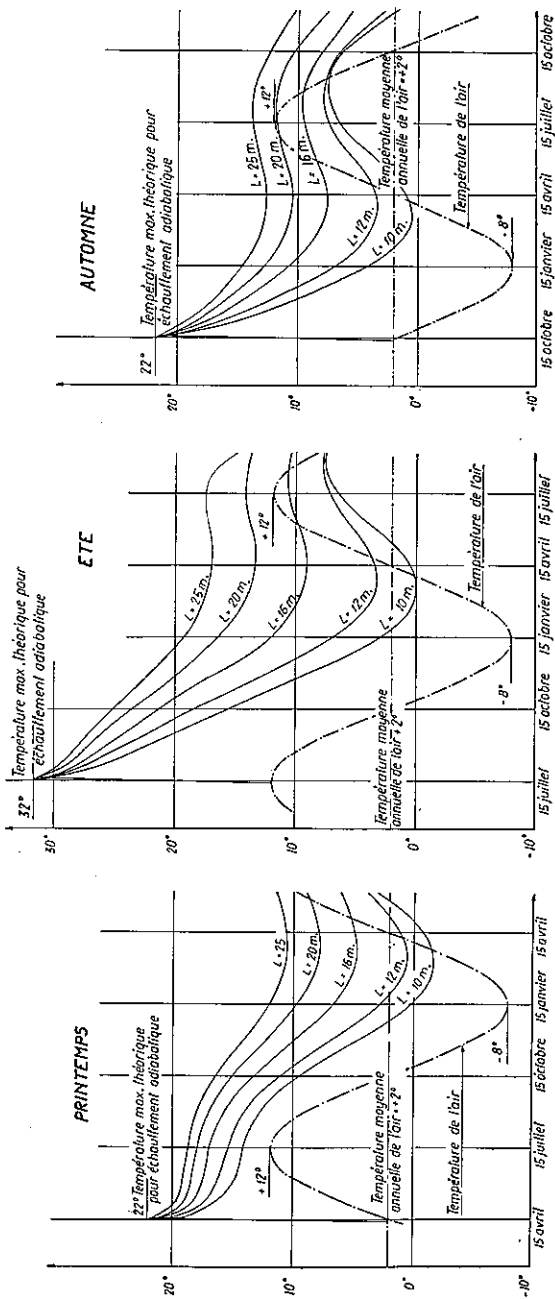


FIG. III-14. — Exemples de refroidissement naturel de murs en béton exécutés à différentes époques

Premier cas : béton à fort dégagement de chaleur (élévation de température adiabatique : 32° C correspondant à un dosage de 250-280 kgCP/m³)

Deuxième cas : béton à dégagement de chaleur modéré (élévation de température adiabatique : 20° C correspondant à un dosage de 150-160 kgCP/m³)

Diffusivité : a = 0,004 m²/h.

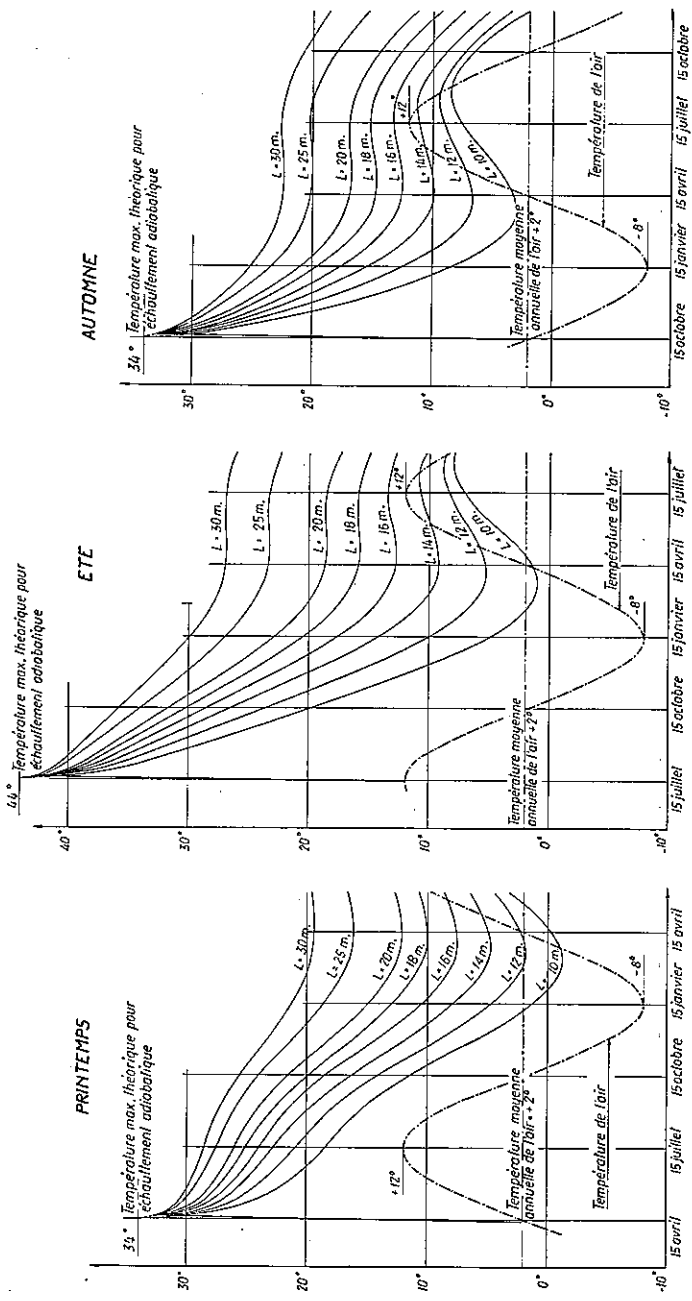


Fig. III-15. — Exemples de refroidissement naturel de cylindres en béton exécutés à différentes époques. Béton à fort dégagement de chaleur (élévation de température adiabatique : 32°C correspondant à un dosage de $250\text{-}280\text{ kgCP/m}^3$)
 Diffusivité : $a = 0,004\text{ m}^2/\text{h}$

Les figures III-14 et III-15 représentent les résultats d'une telle étude, faite pour un barrage situé dans une région où la température de l'air varie de -8° à $+12^{\circ}$ au cours de l'année, avec une moyenne de $+2^{\circ}$. Deux cas extrêmes ont été envisagés : celui

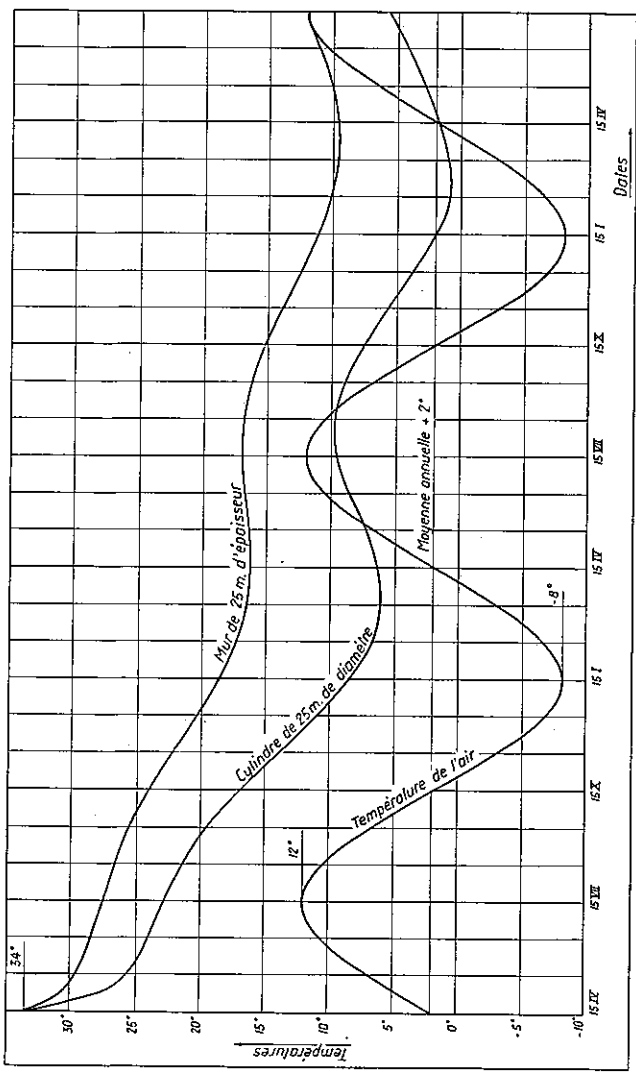


FIG. III-16. — Exemples de refroidissement naturel d'un mur de 25 m d'épaisseur et d'un cylindre de 25 m de diamètre, pendant deux ans. Élévation de température adiabatique : 32° C. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

d'un béton dosé à 250 kg CP/m³, avec un échauffement adiabatique de 32° C au-dessus de la température de bétonnage, et celui d'un béton à 160 kg CP/m³, avec un échauffement adiabatique de 20° C. Les courbes de refroidissement ont été tracées pour des murs de différentes épaisseurs et des cylindres de différents diamètres, bétonnés au printemps, en été ou en automne.

La comparaison de ces graphiques permet de tirer plusieurs conclusions :

Pour limiter les efforts de traction provoqués par les variations de température ultérieures, il est désirable que les voussoirs aient atteint, au moment du clavage, une température aussi basse que possible, en tout cas peu supérieure à la température moyenne du lieu.

Quels que soient le dosage et l'époque du bétonnage, cette condition ne peut pas être atteinte avant le printemps qui suit l'année du bétonnage. Dans le cas de murs, elle n'est réalisée en moins d'une année que si l'épaisseur ne dépasse pas 12 à 14 m pour des murs bétonnés au printemps, 10 à 12 m pour des murs bétonnés en été ou en automne. Pour les murs plus épais, il faut attendre au moins deux ans. Un calcul poussé plus loin, et reproduit par la figure III-16, montre que deux ans après le bétonnage, un mur de 25 m d'épaisseur conserve encore une température bien supérieure (environ 10°) à la moyenne du lieu.

L'époque la plus favorable pour l'injection des joints se situe entre avril et mai ; si, pour des raisons de chantier, on n'a pas pu exécuter l'injection à ce moment, il vaudrait mieux attendre l'année suivante, car dès le mois de mai, la température du béton tend à remonter sous l'effet du réchauffement de l'air ; ceci est surtout vrai pour les murs minces (mais pour les murs épais, il faut de toutes façons attendre deux ans au moins).

Comme on peut le prévoir, les cylindres se refroidissent beaucoup plus vite que les murs de même épaisseur, ce qui justifie le découpage du barrage en voussoirs séparés par des brèches. Ils suivent aussi de beaucoup plus près les oscillations de la température extérieure.

CHAPITRE IV

RÉFRIGÉRATION ARTIFICIELLE DU BÉTON AU MOYEN D'UNE CIRCULATION D'EAU

PARTIE THÉORIQUE

IV - 1. EFFET D'UN TUBE DE RÉFRIGÉRATION UNIQUE DANS UNE MASSE DE BÉTON INFINIE

Bien qu'en pratique, on ne refroidisse jamais une masse infinie de béton au moyen d'un seul tube, mais par tout un réseau plus ou moins régulièrement distribué, l'étude de l'effet d'un tube unique est utile pour la discussion de la première phase de la réfrigération, avant que les zones d'action des différents tubes se soient interpénétrées. D'autre part, l'étude théorique de ce problème élémentaire peut être intéressante par les transpositions dont elle est susceptible dans d'autres domaines de la technique (abaissement d'une nappe phréatique au moyen d'un puits de pompage, par exemple). Nous chercherons tout d'abord à calculer l'effet d'une émission (ou d'une absorption) de chaleur le long d'une droite dans un massif infini, puis nous appliquerons la solution de ce problème préliminaire au cas de l'échange de chaleur le long d'un tube dont la température est maintenue pratiquement constante.

IV - 1a) Effet d'une émission (ou d'une absorption) continue de chaleur, le long d'une droite, dans une masse de béton infinie

L'émission continue de chaleur peut être considérée comme une suite de petites explosions se produisant à intervalles réguliers, aussi serrés qu'on le veut. La chaleur libérée par chacune de ces explosions

fait d'abord monter à l'infini la température le long de la ligne, puisque le volume de matière correspondant est nul ; elle déclenche une onde solitaire de chaleur, qui se répand peu à peu dans la masse, dont la température s'élève de proche en proche au passage de l'onde. Entre deux explosions successives, la quantité totale de chaleur contenue dans la masse ne varie pas, et par conséquent, la température moyenne de la masse demeure constante aussi, durant cet intervalle.

Considérons tout d'abord *l'effet d'une explosion unique*, à l'origine des temps, le long d'une droite ; coupons une tranche de matière par deux plans parallèles entre eux, perpendiculaires à la droite, et distants de 1,00 m. Ceci revient à isoler un cylindre de section infinie, de longueur unité, dont la droite est l'axe.

La répartition des températures doit satisfaire en chaque instant à l'équation générale déjà donnée sous chiffre (I-2) en coordonnées cylindriques :

$$(IV-1) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]$$

les conditions aux limites étant

- a) pour $t = 0$ et $r > 0$, $\theta = 0$;
 b) pour $t = 0$ et $r = 0$, $\theta = \infty$.

D'autre part, si W_1 est la quantité de chaleur dégagée par l'explosion, on doit avoir à chaque instant

$$c) \quad \iiint_{\forall} c \gamma \theta r dr dz d\varphi = W_1.$$

On vérifie aisément que la fonction

$$(IV-2) \quad \theta = \frac{W_1}{4c\gamma a\pi t} e^{-\frac{r^2}{4at}}$$

satisfait à l'équation générale (IV-1) et aux conditions a) et b).

Elle satisfait également à la condition c) ; en effet :

$$\iiint_{\forall} c \gamma \theta r dr dz d\varphi = c\gamma \cdot 1,00 \cdot \frac{W_1}{4c\gamma a\pi t} \cdot 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4at}} r dr.$$

Si l'on pose

$$(IV-3) \quad \nu = \frac{r^2}{4at}, \quad d\nu = \frac{r}{2at} dr$$

cette expression devient bien

$$(IV-4) \quad W_i \int_0^\infty e^{-\nu} d\nu = W_i$$

car l'intégrale vaut 1.

S'il se produit maintenant une *succession d'explosions*

$$\begin{array}{llll} W_{i_0} & \text{Cal/m} & \text{au temps} & t_0, \\ W_{i_1} & \text{»} & \text{»} & t_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{i_i} & \text{»} & \text{»} & t_i, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{i_n} & \text{»} & \text{»} & t_n, \end{array}$$

la température au temps t postérieur à t_n vaudra :

$$(IV-5) \quad \theta(t) = \frac{1}{4c\gamma a\pi} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{W_i}{(t-t_i)} e^{\frac{-r^2}{4a(t-t_i)}}.$$

Enfin, une *émission de chaleur continue* ω_i Cal/m h peut être assimilée à une série d'explosions infiniment rapprochées, l'une quelconque d'entre elles valant à l'instant t_i :

$$(IV-6) \quad W_{i_i} = \omega_i(t_i)dt_i.$$

La température est alors donnée par

$$(IV-7) \quad \theta(t) = \frac{1}{4c\gamma a\pi} \int_0^{t_n} \frac{\omega_i}{t-t_i} e^{\frac{-r^2}{4a(t-t_i)}} dt_i.$$

En posant

$$(IV-8) \quad \frac{r^2}{4a(t-t_i)} = u, \quad \frac{du}{u} = \frac{dt_i}{t-t_i}$$

et en remarquant que

$$(IV-9) \quad c\gamma a = \lambda \quad \text{en vertu de la définition de la diffusivité } a,$$

pour une *émission de chaleur constante* w_l Cal/m h depuis l'origine des temps jusqu'au temps t , on obtient la température

$$(IV-10) \quad \theta(t) = \frac{w_l}{4\pi\lambda} \int_{\frac{r^2}{4at}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \frac{w_l}{4\pi\lambda} \left[-Ei \left(\frac{-r^2}{4at} \right) \right].$$

La fonction

$$(IV-11) \quad -Ei \left(\frac{-r^2}{4at} \right) = \int_{\frac{r^2}{4at}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

dite « exponentielle intégrale », représente donc la température à distance r de l'axe, au temps t , lorsqu'une source de chaleur a émis régulièrement $4\pi\lambda$ Cal/m h le long de l'axe, depuis l'origine des temps jusqu'au temps t considéré.

IV - 1b) Refroidissement d'une masse de béton infinie, au moyen d'un tube unique de rayon r_0 , maintenu constamment à 0° C par une circulation d'eau

b 1) RÉPARTITION DES TEMPÉRATURES

Soit une masse de béton infinie traversée par un cylindre de révolution, de rayon r_0 ; la température initiale de la masse étant θ_0 et celle du cylindre constamment maintenue à la valeur 0° C (*), on cherche quelle est, à un instant t quelconque, la température de la masse, à une distance quelconque $r > r_0$ de l'axe du cylindre.

La fonction cherchée, $\theta(r, t)$, doit satisfaire à l'équation générale

$$(IV-1) \equiv (I-2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right].$$

Il s'agit d'intégrer cette équation aux dérivées partielles pour $r \geq r_0$, $t \geq 0$, en satisfaisant aux conditions

- a') pour $r = r_0$, quel que soit t , $\theta = 0$;
- b') pour $t = 0$ et $r > r_0$, $\theta = \theta_0 > 0$.

(*) Cette hypothèse revient à admettre que le débit d'eau de réfrigération dans le tube a une valeur infiniment grande, puisque cette eau enlève de la chaleur au béton sans s'échauffer; nous verrons plus loin l'influence du débit d'eau.

Faute de trouver une solution de l'équation (IV-1) satisfaisant à la fois aux deux conditions $a')$ et $b')$ aux limites, il a fallu remplacer la condition $a')$ par une approximation, tout à fait admissible d'ailleurs.

Au lieu de la fonction $\theta(r, t)$ identiquement nulle pour $r = r_0$, c'est-à-dire $\theta(r_0, t) \equiv 0$, il a été possible de trouver une fonction $\varphi(r, t)$ telle qu'en un temps très court, sur le bord du cylindre de rayon $r = r_0$, elle passe de la valeur $\theta = \theta_0$ à la valeur $\theta = 0$ et s'y maintient sensiblement constante. Cette fonction est une combinaison linéaire de solutions qui, toutes, satisfont à l'équation (IV-1) et à la condition $b')$. Chacune de ces solutions particulières est une « exponentielle intégrale », dont l'expression générale a été donnée au paragraphe précédent :

$$(IV-11) \quad -Ei(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Développée en série, cette fonction s'écrit

$$(IV-11') \quad -Ei(-x) = -0,577\ 215\ 665 - \ln x + \\ + x - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} - \dots$$

Les tables de Jahnke-Emde ⁽¹³⁾ en donnent les valeurs numériques.

On peut montrer que

$$(IV-12) \quad \varphi(r, t) = -Ei\left(-\frac{r^2}{4at}\right) = \int_{\frac{r^2}{4at}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

satisfait à l'équation (IV-1).

Si, dans la fonction φ , on remplace t par $(t - t_i)$, où t_i est une constante quelconque, on obtient une nouvelle fonction $\varphi_1(r, t - t_i)$; les dérivées de φ_1 par rapport à r et $(t - t_i)$ sont respectivement identiques à celles de φ par rapport à r et t . Si φ est solution de (IV-1), φ_1 est évidemment solution de l'équation

$$(IV-13) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial (t - t_i)} = a \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right].$$

⁽¹³⁾ E. JAHNKE et F. EMDE : *Tables of functions*. Dover Publications, New York, 1945.

Mais

$$(IV-14) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial(t-t_i)} \cdot \frac{\partial(t-t_i)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial(t-t_i)} \cdot 1, \quad \text{donc}$$

$$(IV-13') \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right].$$

Ainsi, la fonction φ_1 satisfait aussi à l'équation (IV-1). Ceci provient du fait que cette équation ne contient pas explicitement la variable t .

Toute combinaison linéaire

$$(IV-15) \quad \psi(r, t_n) = \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i \varphi(r, t_n - t_i)$$

est aussi une solution de l'équation (IV-1), de même que

$$(IV-16) \quad \theta = \theta_0 [1 - \psi(r, t_n)].$$

t_i représente un terme quelconque d'une série $t_0 = 0, t_1, \dots, t_i \dots, t_n$, de valeurs croissantes et tendant vers $+\infty$.

On convient de poser $\varphi(r, t_n) = 0$ si $t_n - t_i \leq 0$, c'est-à-dire si $i \geq n$; $\psi(r, t_n)$ sera donc formée d'un nombre fini de termes, correspondant aux valeurs de $i = 0$ jusqu'à $i = n - 1$.

a_i représente un coefficient numérique, en principe quelconque; on pourra le choisir de façon que $\psi(r, t_n)$ satisfasse non seulement à l'équation (IV-1) (ce qui est déjà le cas quel que soit a_i), mais encore à la condition a' ; on posera pour cela

$$(IV-17) \quad \psi(r_0, t_n) = 1$$

pour toute valeur de $n = 1, 2, 3, \dots$

c'est-à-dire,

$$\text{pour } n = 1, \quad \psi(r_0, t_1) = a_0 \varphi(r_0, t_1 - t_0) = 1$$

$$n = 2, \quad \psi(r_0, t_2) = a_0 \varphi(r_0, t_2 - t_0) + a_1 \varphi(r_0, t_2 - t_1) = 1$$

$$n = 3, \quad \psi(r_0, t_3) = a_0 \varphi(r_0, t_3 - t_0) + a_1 \varphi(r_0, t_3 - t_1) + \\ + a_2 \varphi(r_0, t_3 - t_2) = 1$$

etc.

Rappelons que $t_0 = 0$.

Ces relations permettent de calculer successivement a_0, a_1, a_2, \dots

La condition $\theta = 0$ pour $r = r_0$ est rigoureusement satisfaite aux époques t_1, t_2, t_3, \dots . Entre ces époques, elle l'est approximativement, parce que la fonction φ varie assez lentement.

L'équation (IV-16) représente donc la solution approchée du problème posé. Cette approximation peut être aussi poussée qu'on le veut ; il suffit de choisir des temps t_n assez rapprochés. Le calcul numérique montre que la croissance de $\varphi(r_0, t_n)$, très forte au début, diminue rapidement, ce qui permet de choisir des intervalles de plus en plus longs au fur et à mesure que n augmente. On a choisi des intervalles de $1/10$ d'heure jusqu'à l'âge de 1 heure, puis de 1 heure jusqu'à l'âge de 10 heures, de 10 heures jusqu'à l'âge de 100 heures, etc.

La figure IV-1 donne la fonction $\psi(r_0, t_n)$ pour $0 \leq t_n \leq 0,3$ heure ; au-delà de 0,3 heure, elle reste très voisine de la valeur 1.

La figure IV-2 montre la répartition des températures en fonction de la distance r au tuyau de réfrigération, à différentes époques t , pour le cas $r_0 = 1$ cm et $a = 0,004$ Cal/m² h.

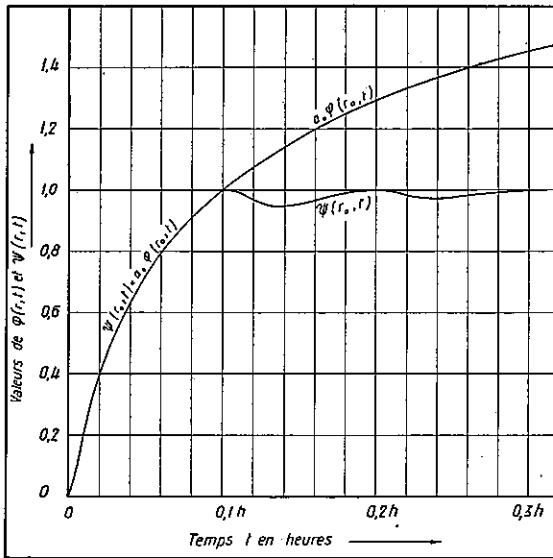


FIG. IV-1. — Effet d'un tube de réfrigération unique
Fonctions $\phi(r_0, t)$ d'après l'équation (IV-12)
et $\psi(r_0, t)$ d'après l'équation (IV-17).
Diffusivité : $a = 0,004$ m²/h ; diamètre du tube : 20 mm

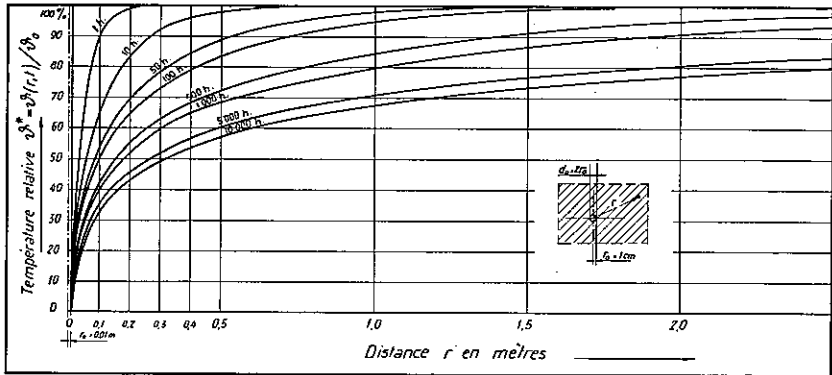


FIG. IV-2. — Répartition des températures à différentes époques, en fonction de la distance r d'un tube de réfrigération unique, la température de l'eau étant maintenue à 0°C . Diffusivité: $a=0,004\text{ m}^2/\text{h}$; diamètre du tube: 20 mm.

La figure IV-3 donne à l'échelle logarithmique les courbes d'égalité de chute de température, en fonction du temps et de la distance du point considéré à l'axe du tube.

b 2) ECHANGE DE CHALEUR

Comme on l'a montré au paragraphe IV-1a), l'exponentielle intégrale (IV-11) et, par conséquent, la fonction $\varphi(r, t)$ définie par l'équation (IV-12), représentent la température à l'instant t , à distance r de l'axe, lorsque, depuis l'origine des temps, l'axe a dégagé, par heure et par mètre linéaire, une quantité de chaleur constante ω_l calories, numériquement égale à $4\pi\lambda$, λ étant le coefficient de conductibilité du béton en $\text{Cal}/\text{m h }^\circ\text{C}$; d'après les essais de laboratoire récents, les bétons de barrages fabriqués par les méthodes actuelles, avec les agrégats du Valais, ont un coefficient de conductibilité compris entre 2,0 et 2,5 $\text{Cal}/\text{m h }^\circ\text{C}$. Le graphique IV-5 est tracé pour le cas $\lambda = 2,2\text{ Cal}/\text{m h }^\circ\text{C}$.

La fonction $a_i\varphi(r, t_n - t_i)$ correspond ainsi à un dégagement de chaleur constant $\omega_{ii} = 4\pi\lambda a_i$ pendant l'intervalle de t_i à t_n . Pour trouver la température à l'époque t_n , on a découpé le temps en

intervalles de 0 à t_n , de t_1 à t_n , de t_2 à t_n , ... de t_i à t_n , ... de t_{n-1} à t_n , et cherché l'état thermique résultant de la superposition des effets de la chaleur dégagée (ou absorbée) dans chaque intervalle ($t_n - t_i$). La température au temps t_n est ainsi donnée par

$$(IV-15) \quad \psi(r, t_n) = \sum a_i \varphi(r, t_n - t_i)$$

et le dégagement de chaleur à cet instant est la somme des quantités de chaleur dégagées pendant les intervalles de 0 à t_n , de t_1 à t_n , ... de t_i à t_n , ... c'est-à-dire

$$(IV-18) \quad \omega_{ln} = 4\pi\lambda \sum_0^n a_i.$$

La figure IV-4 illustre le principe de cette superposition.

Durant les différents intervalles, le dégagement de chaleur a donc été :

$$(IV-19) \quad \begin{cases} \omega_{l_0} = 4\pi\lambda a_0 & \text{de } t_0 \text{ à } t_1 ; \\ \omega_{l_1} = 4\pi\lambda (a_0 + a_1) & \text{de } t_1 \text{ à } t_2 ; \\ \omega_{l_2} = 4\pi\lambda (a_0 + a_1 + a_2) & \text{de } t_2 \text{ à } t_3 ; \\ \text{etc.} \end{cases}$$

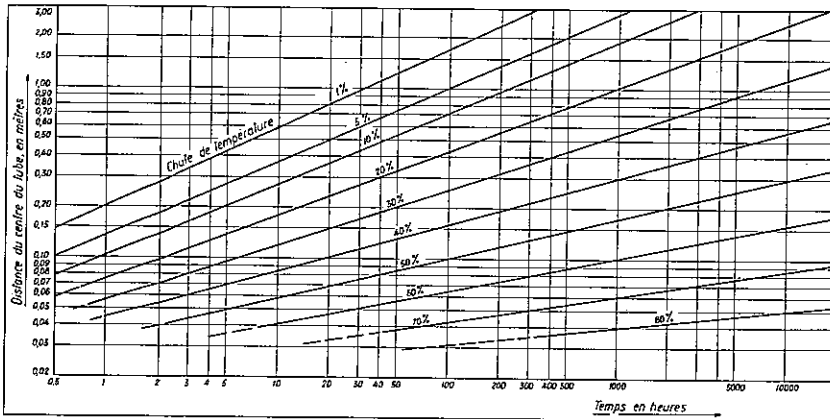


FIG. IV-3. — Effet d'un tube de réfrigération unique. Courbes d'égale chute de température

en % de la différence entre la température initiale de la masse de béton et la température de l'eau, en fonction du temps et de la distance du point considéré au centre du tube. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$; diamètre du tube : 20 mm.

Les coefficients a_i ayant été choisis de telle façon qu'à distance r_0 de l'axe, sur le pourtour du tube de réfrigération, la température s'abaisse rapidement de 1°C puis se maintienne à peu près constante, la fonction $w_i(t_n)$ représente l'absorption de chaleur nécessaire pour remplir cette condition. Dans notre cas, au temps t_0 (en fait, dans l'intervalle t_0 à t_1), la variation de température sur le tube n'est pas de $+1^\circ\text{C}$ mais de $\theta^\circ\text{C}$; l'axe du tube doit donc absorber $\theta \cdot w_i$ calories par m^1 .

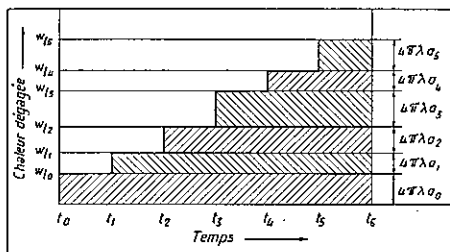


FIG. IV-4 — Principe du calcul de la quantité de chaleur dégagée à l'instant t_n , selon l'équation (IV-18)

La quantité de chaleur théoriquement absorbée par l'axe ne correspond pas rigoureusement à celle que doit emporter l'eau de réfrigération du tube, puisque la première comprend la chaleur contenue dans une masse fictive de béton de rayon r_0 . En fait, cette différence n'intervient que dans l'intervalle de t_0 à t_1 ; ensuite, puisque la température sur le cylindre de rayon r_0 reste pratiquement constante, la chaleur contenue à l'intérieur de ce cylindre de béton fictif ne varie pas.

La figure IV-5 montre la quantité de chaleur w_i^* à absorber par l'eau de réfrigération en fonction du temps, la température initiale du béton étant supposée égale à 1°C et celle de l'eau constamment maintenue à 0° . Cette valeur w_i^* étant relative à une différence de température initiale de 1° entre le béton et l'eau, elle doit être multipliée par la différence $(\theta_0 \text{ béton} - \theta_{\text{eau}})$ effective au début de la réfrigération. Admettre que la température de l'eau reste constante, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'échauffement entre l'entrée et

la sortie du tuyau, revient à supposer que le *débit d'eau* est infini. La valeur réelle du débit étant finie, l'eau s'échauffe au contact du béton et la réfrigération de celui-ci est un peu moins rapide. On verra plus loin (paragraphe IV-3) l'influence du débit d'eau.

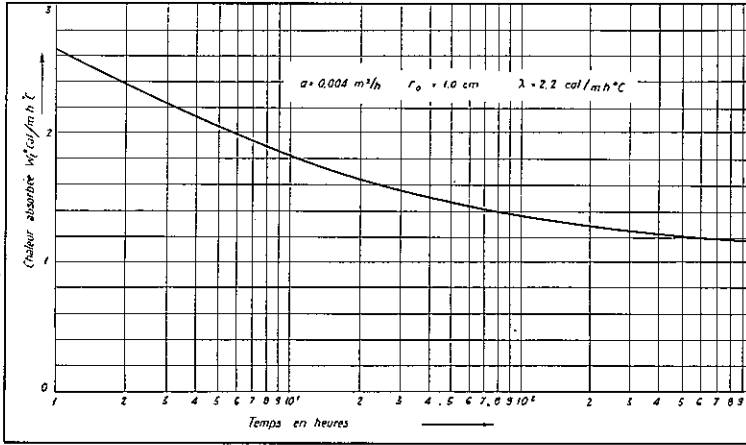


FIG. IV-5. — Effet d'un tube de réfrigération unique. Chaleur cédée par le béton à l'eau en fonction du temps, lorsque le débit d'eau est infini et la différence de température initiale entre le béton et l'eau de 1°C . Conductivité du béton : $\lambda = 2,2 \text{ Cal/mh } ^\circ\text{C}$. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$; diamètre du tube : 20 mm.

IV - 2. EFFET D'UN RÉSEAU DE TUBES DISPOSÉS EN « NID D'ABEILLES »

IV - 2a) Température locale

Considérons une série de tubes parallèles uniformément distribués dans la masse de béton, de sorte que dans une section normale à la direction des tubes, ceux-ci se trouvent au centre (ou aux sommets) d'hexagones réguliers juxtaposés ; ils forment un « nid d'abeilles » ou « réseau hexagonal » (voir, par exemple, le croquis sur la figure IV-8). La température initiale du béton étant θ_0 , uniforme, nous imposons au temps t_0 un abaissement brusque de θ_0 à

0° C sur le pourtour des tubes, de rayon r_0 ; la température des tubes est ensuite maintenue à 0° C, avec la même approximation que dans le cas du tube unique (voir paragraphe IV-1b).

L'évolution de la température au voisinage de chaque tube sera la même que si chacun d'eux se trouvait dans l'axe d'un prisme hexagonal parfaitement isolé sur ses faces puisque, à cause de la symétrie, il n'y a pas de passage de chaleur d'un prisme à ses voisins. Pour le calcul, on peut avec une bonne approximation remplacer le prisme par un cylindre de même masse ; si l'écartement des tubes est e_H , le rayon du cylindre équivalent vaut

$$R = 0,525 e_H.$$

L'état thermique est toujours régi par l'équation

$$(IV-1) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]$$

mais ici θ doit satisfaire aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} a'' & \text{ pour } r = r_0, & \theta & = 0 \\ b'' & \text{ pour } r = R, & \frac{\partial \theta}{\partial r} & = 0 \\ c'' & \text{ pour } t = 0 \quad \text{et} \quad r_0 < r < R, & \theta & = \theta_0 > 0. \end{aligned}$$

La solution de l'équation (IV-1), que l'on peut trouver par séparation des variables, peut être représentée par une somme d'exponentielles décroissantes, en t :

$$(IV-20) \quad \theta(r, t) = \theta_0 \sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-p_i t} \{ A_i J_0(y_i) + B_i N_0(y_i) \}$$

où p_i est un coefficient positif, dont la valeur dépend de $2r_0$ et de $2R$, c'est-à-dire du diamètre des tubes et de leur écartement ;

J_0 est la fonction de Bessel de 1^{re} espèce, d'ordre zéro ;

N_0 est la fonction de Bessel de 2^e espèce, d'ordre zéro ;

A_i et B_i sont des constantes d'intégration, à déterminer ;

$$y_i = r \sqrt{\frac{p_i}{a}}.$$

Le calcul numérique montre qu'au bout de peu de temps, les termes d'ordre supérieur au premier, dans cette somme d'exponentielles, décroissent rapidement. En particulier, après que l'effet de la réfrigération s'est fait sentir jusqu'au bord du cylindre représentant la zone d'action d'un tube, il suffit de s'en tenir au premier terme de la série. La solution (IV-20) peut dès lors s'écrire

$$(IV-20') \quad \theta(r, t) = \theta_0 e^{-pt} \{ A J_0(y) + B N_0(y) \}.$$

Il s'agit de déterminer la valeur de l'exposant $p = p_1$ et des constantes A et B .

Par dérivation de l'équation (IV-20'), on trouve :

$$(IV-21) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = \theta_0 e^{-pt} \{ A J_1(y) + B N_1(y) \}.$$

Les constantes d'intégration A et B doivent satisfaire au système :

$$(IV-22) \quad \begin{cases} A J_0(y_0) + B N_0(y_0) = 0 & \text{car } \theta = 0 \text{ pour } r = r_0 \text{ et } t \text{ quelconque} \\ A J_1(Y) + B N_1(Y) = 0 & \text{car } \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \text{ pour } r = R \text{ et } t \text{ quelconque} \end{cases}$$

$$\text{où} \quad y_0 = r_0 \sqrt{\frac{p}{a}} \quad \text{et} \quad Y = R \sqrt{\frac{p}{a}}.$$

Pour que ce système admette des solutions A et B différentes de zéro, il faut que le déterminant des coefficients des inconnues s'annule :

$$(IV-23) \quad J_0(y_0) N_1(Y) - N_0(y_0) J_1(Y) = 0.$$

$$(IV-24) \quad \frac{J_0(y_0)}{N_0(y_0)} = \frac{J_1(Y)}{N_1(Y)} = \frac{J_1(Ky_0)}{N_1(Ky_0)} \quad \text{où} \quad K = \frac{R}{r_0}.$$

De cette équation, les constantes A et B ont disparu, mais le coefficient p encore inconnu est implicitement contenu dans y_0 et Y ; l'équation (IV-24) peut être résolue graphiquement au moyen de l'abaque IV-6 :

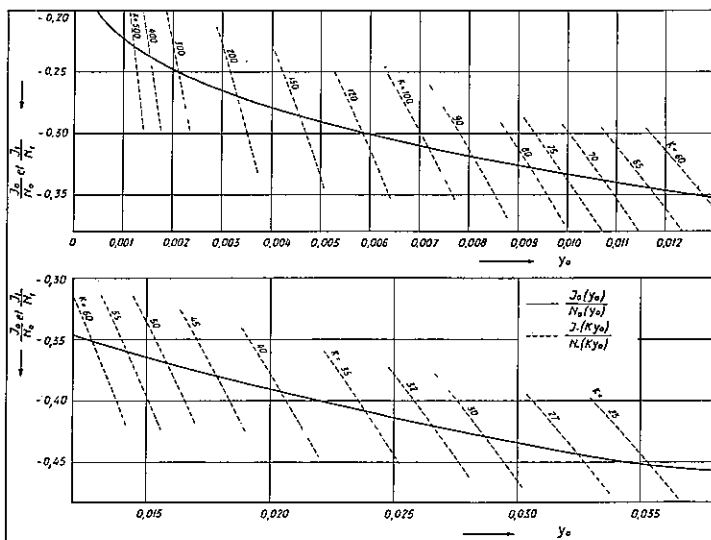


FIG. IV-6. — Résolution de l'équation (IV-24)

Une table des fonctions de Bessel ⁽¹³⁾ permet de tracer, en fonction de y_0 , la courbe $\frac{J_0}{N_0}$ (*); pour différentes valeurs du rapport $K = \frac{Y}{y_0} = \frac{R}{r_0}$, on trace les courbes $\frac{J_1}{N_1}$, ce qui permet, par interpolation, de trouver pour toute valeur de K , la valeur y_0 satisfaisant à l'équation (IV-24). On en déduit p :

$$(IV-25) \quad p = a \frac{(y_0)^2}{(r_0)^2}.$$

Exemple : Soit à chercher l'exposant p dans le cas d'un réseau « hexagonal » de tubes de 20 mm de diamètre, espacés de 3,00 m :
 Rayon du cylindre de béton équivalent à la zone d'action d'un tube : $R = 0,525 \times 3,0 = 1,575$ m.
 Rayon du tube : $r_0 = 10$ mm = 0,01 m.

$$K = \frac{R}{r_0} = \frac{1,575 \text{ m}}{0,01 \text{ m}} = 157,5.$$

⁽¹³⁾ Par exemple tables de E. JAHNKE et F. EMDE, *loc. cit.*, page 89.

(*) On observera que pour $y_0 \ll 1$, $J_0 \cong 1,000$ et $N_0 = 0,073805 - \ln y_0$.

On lit sur le graphique, par interpolation entre $K = 150$ et $K = 200$

$$y_0 = 0,00432,$$

d'où
$$p = 0,004 \cdot \frac{(0,00432)^2}{(0,01)^2} \frac{\text{m}^2}{\text{h} \cdot \text{m}^2} = 0,000746 \text{ h}^{-1}.$$

C'est ainsi qu'ont été calculées les valeurs reproduites sur le graphique IV-7.

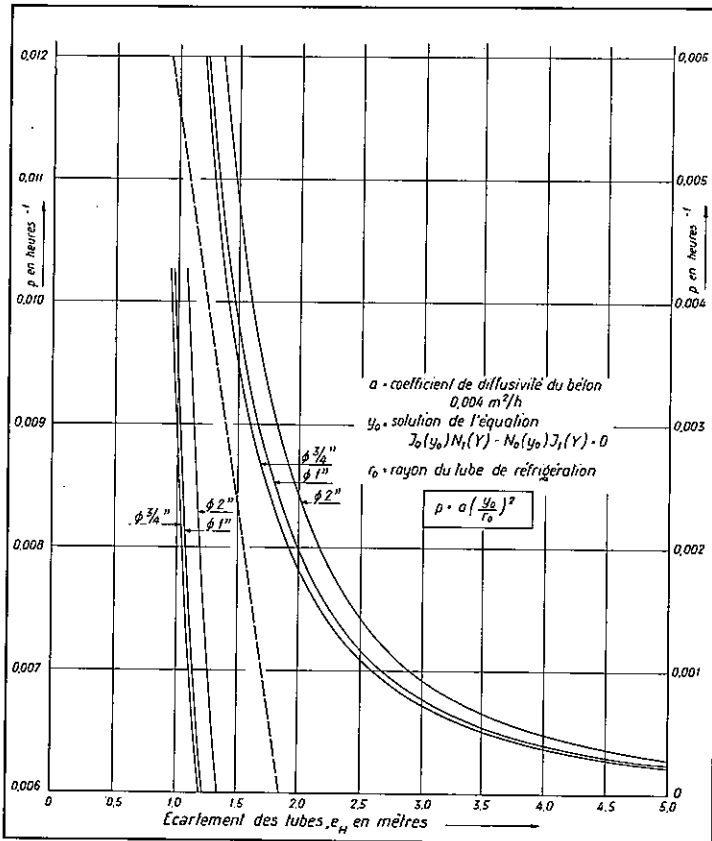


FIG. IV-7. — Coefficient d'amortissement p de l'équation (IV-20').
 Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

La condition (IV-24) étant remplie par la valeur de p ainsi trouvée, les constantes A et B sont déterminées à une constante C près :

$$(IV-26) \quad \begin{cases} A = CN_0(y_0) \\ B = -CJ_0(y_0). \end{cases}$$

En remplaçant A et B par ces valeurs dans les équations (IV-20') et (IV-21), on obtient, pour les expressions entre accolades :

$$(IV-27) \quad \{AJ_0(y) + BN_0(y)\} = C[N_0(y_0)J_0(y) - J_0(y_0)N_0(y)] = CP^{(0)}$$

$$(IV-28) \quad \{AJ_1(y) + BN_1(y)\} = C[N_0(y_0)J_1(y) - J_0(y_0)N_1(y)] = CP^{(1)}$$

où les symboles $P^{(0)}$ et $P^{(1)}$ représentent, en abrégé, les expressions entre crochets des relations (IV-27) et (IV-28).

On calculerait la constante C en écrivant la condition c'' , $\theta = \theta_0$ à l'origine des temps, en observant toutefois qu'à cette époque, on doit appliquer l'équation (IV-20) et non sa forme simplifiée (IV-20'), valable plus tard seulement. On trouverait ainsi :

$$(IV-29) \quad C = 2 \sqrt{\frac{a}{p}} \frac{|rP^{(1)}|_{r_0}^R}{|r^2 [(P^{(0)})^2 + (P^{(1)})^2]_{r_0}^R}.$$

Or on a :

$$(IV-30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } r = r_0 \\ P_{r_0}^{(0)} = N_0(y_0)J_0(y_0) - J_0(y_0)N_0(y_0) \equiv 0 \\ P_{r_0}^{(1)} = N_0(y_0)J_1(y_0) - J_0(y_0)N_1(y_0) = \frac{2}{\pi y_0} \\ \text{(Voir Jahnke et Emde, }^{(13)} \text{ page 144).} \\ \text{Pour } r = R \\ P_R^{(0)} = N_0(y_0)J_0(Y) - J_0(y_0)N_0(Y) \\ P_R^{(1)} = N_0(y_0)J_1(Y) - J_0(y_0)N_1(Y) \equiv 0, \\ \text{en vertu de l'équation (IV-23).} \end{array} \right.$$

Tenant compte de ces relations, on obtient

$$(IV-31) \quad C = -\sqrt{\frac{a}{p}} \frac{4\pi y_0 r_0}{(RP_R^{(0)} \pi y_0)^2 - (2r_0)^2} = -\frac{4\pi a}{R^2 (P_R^{(0)})^2 \pi^2 p - 4a}.$$

⁽¹³⁾ *Loc. cit.*, voir page 89.

Compte tenu des relations (IV-20') et (IV-27), il suffit de porter cette valeur de C dans l'équation (IV-20'') suivante :

$$(IV-20'') \quad \theta(r, t) = \theta_0 C e^{-pt} \{ N_0(y_0) J_0(y) - J_0(y_0) N_0(y) \} = \theta_0 C e^{-pt} P^0$$

pour obtenir la température locale en tout point dès que t est suffisamment grand, de l'ordre d'une centaine d'heures dans les cas courants.

IV - 2b) Température moyenne du massif de béton

La température locale étant $\theta(r, t)$, la température moyenne $\bar{\theta}(t)$ du cylindre intéressé par un tube (et par conséquent la température moyenne de la masse entière), vaut :

$$(IV-32) \quad \bar{\theta}_t = \frac{\int_{r_0}^R r \theta dr}{\int_{r_0}^R r dr}$$

La pratique montre que, pour le calcul de la moyenne, on peut dès l'origine des temps négliger les termes d'ordre supérieur au premier dans l'expression (IV-20) et adopter pour $\theta(r, t)$ la forme simplifiée (IV-20''). En combinant cette dernière équation avec les relations (IV-31) et (IV-32), on obtient

$$(IV-33) \quad \bar{\theta}_t = \frac{2 \theta_0 C e^{-pt}}{R^2 - r_0^2} \sqrt{\frac{a}{p}} \{ R P_{(R)}^{(1)} - r_0 P_{(r_0)}^{(1)} \}.$$

L'expression entre accolades peut s'écrire, en vertu des relations (IV-30) :

$$(IV-33') \quad \bar{\theta}_t = - \frac{4 \theta_0 C r_0 e^{-pt}}{\pi y_0 (R^2 - r_0^2)} \sqrt{\frac{a}{p}} \left\{ R \times 0 - r_0 \frac{2}{\pi y_0} \right\} \quad \text{donc}$$

En remplaçant C par sa valeur (IV-31), on a :

$$(IV-33'') \quad \bar{\theta}_t = \theta_0 \frac{46a^2}{p(R^2 - r_0^2) [R^2 (P_R^{(0)})^2 \pi^2 p - 4a]} e^{-pt} = \theta_0 F e^{-pt}$$

où F représente la fraction reproduite dans le deuxième membre de cette équation. Le calcul numérique de nombreux cas nous a montré qu'en pratique, F est très voisin de 1 ; d'autre part, la température de départ étant uniforme, $\theta_0 = \bar{\theta}_0$, de sorte que

$$(IV-34) \quad \bar{\theta}_t \cong \bar{\theta}_0 e^{-pt}$$

Cette formule s'applique au cas où la température de l'eau est de 0° C.

Si la température de l'eau est maintenue constamment à la valeur θ_e , différente de zéro, la formule devient

$$(IV-34') \quad \bar{\theta}_{0,t} - \theta_e = (\bar{\theta}_0 - \theta_e) e^{-pt}$$

La figure IV-8 montre la chute de température, en % de la différence entre la température initiale du massif et celle de l'eau. Le débit d'eau étant supposé infini, les chutes de température indiquées par ce graphique doivent être considérées comme des valeurs-limites. Elles ne seront d'ailleurs pas influencées de façon très notable par la valeur du débit, pourvu que celui-ci ne tombe pas au-dessous d'un certain minimum, comme on le verra au paragraphe suivant.

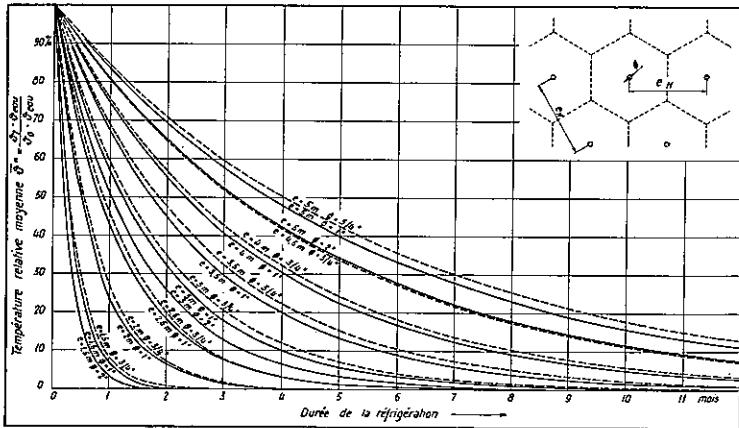


FIG. IV-8. — Réfrigération du béton au moyen de tubes disposés en « nid d'abeilles ». Évolution de la température moyenne du béton en fonction du temps, pour différents écartements et différents diamètres des tubes, la température de l'eau étant supposée constante. Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

**IV - 3. INFLUENCE DE LA VALEUR DU DÉBIT D'EAU
DE RÉFRIGÉRATION,
DANS UN RÉSEAU DE TUBES DISPOSÉS EN « NID D'ABEILLES »**

IV - 3a) Evolution de la température moyenne du béton

On a vu que si la température de l'eau est maintenue constante et uniforme le long du tuyau, $\theta_{\text{eau}} = 0^\circ \text{C}$, la température moyenne du béton suit la loi

$$(IV-35) \quad \bar{\theta}_{bt} = \bar{\theta}_{b0} e^{-pt}$$

où $\bar{\theta}_{bt}$ = température moyenne du béton, au temps t ;

$\bar{\theta}_{b0}$ = température initiale, uniforme, du béton, au temps $t=0$ (*).

Admettre que la température de l'eau ne varie pas malgré l'échange de chaleur entre le béton et l'eau, équivaut à supposer le débit d'eau infini. En fait, le débit est fini, et l'eau s'échauffe le long du tuyau, entre l'entrée et la sortie du serpentin.

On peut admettre que, même si le débit n'est pas infiniment grand, $\bar{\theta}_b$ suit encore une loi exponentielle analogue à l'équation (IV-35), c'est-à-dire

$$(IV-36) \quad \bar{\theta}_{bt} = A e^{-p't} + B.$$

Pour $t = \infty$, on doit avoir $\bar{\theta}_b = 0$, d'où $B = 0$;

pour $t = 0$, $\bar{\theta}_b = \theta_0$, d'où $A = \theta_0$ donc

$$(IV-36') \quad \bar{\theta}_{bt} = \bar{\theta}_{b0} e^{-p't}$$

où p' est un coefficient analogue à p (lequel n'est valable que si le débit d'eau q est infini).

A tout instant, la quantité de chaleur échangée est proportionnelle à la différence de température entre le béton et l'eau ; au début de la réfrigération, la quantité de chaleur absorbée par l'eau est grande, puis elle diminue progressivement et devient d'autant plus petite que la température du béton est plus basse. On peut imaginer d'imposer qu'à chaque instant, la température moyenne de l'eau

(*) Si la température de l'eau à l'entrée des serpentins est différente de 0°C , $\bar{\theta}_{bt}$ et $\bar{\theta}_{b0}$ désignent l'écart entre la température moyenne absolue du béton et celle de l'eau, au temps t et à l'origine des temps.

du serpentin (mesurée par rapport à la température d'entrée de l'eau de réfrigération) soit une fraction donnée f de la température moyenne du béton :

$$(IV-37) \quad \bar{\theta}_{et} = f \bar{\theta}_{bt}.$$

A tout instant aussi, le refroidissement du béton est proportionnel à la quantité de chaleur cédée à l'eau, laquelle quantité, on vient de le voir, est elle-même proportionnelle à l'écart de température entre le béton et l'eau :

$$(IV-38) \quad \frac{\partial \bar{\theta}_{bt}}{\partial t} = K (\bar{\theta}_{bt} - \bar{\theta}_{et}).$$

Il s'agit de chercher la valeur du coefficient de proportionnalité K . La combinaison des relations (IV-36') à (IV-38) donne

$$(IV-39) \quad \frac{\partial \bar{\theta}_{bt}}{\partial t} = -p' \bar{\theta}_{bo} e^{-p't} = K (\bar{\theta}_{bt} - f \bar{\theta}_{bt}) = K (1 - f) \bar{\theta}_{bo} e^{-p't}.$$

$$(IV-40) \quad -p' = K(1 - f).$$

Cette relation (IV-40) doit être vérifiée pour toute valeur du débit ; en particulier, pour $q = \infty$, on a :

$$\bar{\theta}_e \equiv 0 ; \quad f = 0 \quad \text{et} \quad p' = p.$$

$$(IV-40') \quad p = -K(1 - 0) ;$$

$$K = -p.$$

$$(IV-40'') \quad p' = p(1 - f).$$

$$(IV-36'') \quad \boxed{\bar{\theta}_{bt} = \bar{\theta}_{bo} e^{-p(1-f)t}}$$

$$(IV-37'') \quad \boxed{\bar{\theta}_{et} = f \bar{\theta}_{bo} e^{-p(1-f)t}}$$

L'équation (IV-36'') montre bien que, plus l'échauffement de l'eau est grand, c'est-à-dire plus f est grand, plus la réfrigération du béton est lente ; si le débit d'eau q tombe à zéro, $f = 1$, on a $\bar{\theta}_{bt} \equiv \bar{\theta}_{et} \equiv \bar{\theta}_{bo}$, la réfrigération est nulle.

IV - 3b) Calcul du débit d'eau nécessaire

Etant donné l'échauffement relatif f que l'on admet pour l'eau, le bilan thermique permet de calculer le débit q nécessaire à chaque instant pour remplir cette condition.

Par unité de temps, le béton cède à l'eau une quantité de chaleur égale à

$$(IV-41) \quad V \cdot c \cdot \gamma \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_{bt}}{\partial t} = - V \cdot c \cdot \gamma \cdot p (1 - f) \bar{\theta}_{bo} e^{-p(1-f)t}$$

où V = volume du béton réfrigéré ;
 c = chaleur spécifique du béton ;
 γ = poids spécifique du béton.

La quantité de chaleur emportée par l'eau pendant ce temps est

$$(IV-42) \quad (\theta_{e \text{ sortie}} - \theta_{e \text{ entrée}}) Q \cdot c_e \gamma_e$$

où c_e = chaleur spécifique de l'eau = 1 Cal/kg °C ;
 γ_e = poids spécifique de l'eau = 1000 kg/m³ ;
 Q = débit d'eau en m³/h, servant à réfrigérer le volume de béton V .

Les expressions (IV-41) et (IV-42) permettent d'établir le bilan thermique, qui est nul puisque le phénomène est adiabatique :

$$(IV-43) \quad - V c \gamma p (1 - f) \bar{\theta}_{bo} e^{-p(1-f)t} + 2 \bar{\theta}_{et} Q c_e \gamma_e = 0. \quad (*)$$

Tenant compte de (IV-37'), on a :

$$(IV-44) \quad \frac{Q}{V} = q = \frac{p(1-f)}{2f} \frac{c \gamma}{c_e \gamma_e}$$

Des essais de laboratoire nous ont conduits à adopter pour le béton des barrages les valeurs numériques

$$c = 0,25 \text{ Cal/kg } ^\circ\text{C} ;$$

$$\gamma = 2500 \text{ kg/m}^3.$$

(*) Rappelons que dans ce calcul, on a rapporté toutes les températures à celle de l'eau à l'entrée des serpentins, ce qui revient à poser $\theta_{e \text{ entrée}} = 0$, et par conséquent $\theta_{e \text{ sortie}} = 2\bar{\theta}_e$.

L'équation (IV-44) prend ainsi la valeur

$$(IV-44') \quad q = 0,625 \frac{p(1-f)}{2f} \text{ en m}^3 \text{ eau/h.m}^3 \text{ béton.}$$

Exprimé en l eau/s.m³ béton, le *débit spécifique* q vaut

$$(IV-44'') \quad q = \frac{0,625 \times 1000}{3600} \frac{p(1-f)}{2f} = 0,0868 p \left(\frac{1-f}{f} \right).$$

Rappelons que p est un coefficient (exprimé en h⁻¹), qui dépend de la diffusivité a du béton, du diamètre $2r_0$ des tubes et de leur écartement e_H ; f est l'échauffement moyen de l'eau, rapporté à la température moyenne du béton à l'instant considéré. La formule (IV-44) montre que pour réaliser la condition que l'échauffement de l'eau soit à chaque instant proportionnel à la température du béton, c'est-à-dire $f = \text{constante}$, il faut un débit d'eau constant, ce qui, en pratique, sera précisément le cas, du moins pendant de longues périodes.

Le graphique IV-9 donne la valeur de q en fonction de f pour différents écartements des tubes.

En fait, on sera généralement embarrassé pour choisir *a priori* la proportion f tolérable entre l'échauffement de l'eau et la température du béton; faut-il imposer que f ne dépasse pas 10 % de $\bar{\theta}_b$, ou 1 %? Ce que l'on connaîtra plutôt, c'est la température finale désirée du béton, et la durée disponible pour la réfrigération. On aura donc avantage à éliminer f de l'équation (IV-44), en faisant apparaître la température désirée du béton, $\bar{\theta}_{bt}$, à l'époque t ; on se servira pour cela de l'équation (IV-36'').

$$(IV-36'') \quad \bar{\theta}_{bt} = \bar{\theta}_{bo} e^{-p(1-f)t}.$$

$$(IV-45) \quad \ln \frac{\bar{\theta}_{bt}}{\bar{\theta}_{bo}} = -p(1-f)t.$$

$$(IV-45') \quad p(1-f) = \frac{-1}{t} \ln \frac{\bar{\theta}_{bt}}{\bar{\theta}_{bo}} = \frac{1}{t} \ln \frac{\bar{\theta}_{bo}}{\bar{\theta}_{bt}}.$$

Dans cette formule, t est exprimé en heures et p a la dimension h⁻¹. Si l'on exprime t en jours, tout en conservant la dimension de p , on aura

$$(IV-45'') \quad p_{h-1} (1 - f) = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{t_{\text{jours}}} \ln \frac{\bar{\theta}_{bo}}{\bar{\theta}_{bt}}$$

Posons

$$(IV-46) \quad \frac{1}{t_{\text{jours}}} \ln \frac{\bar{\theta}_{bo}}{\bar{\theta}_{bt}} = \Omega_{\text{jours}^{-1}}$$

où $\bar{\theta}_{bo}$ et $\bar{\theta}_{bt}$, rappelons-le, sont mesurés à partir de la température de l'eau à l'entrée des serpentins.

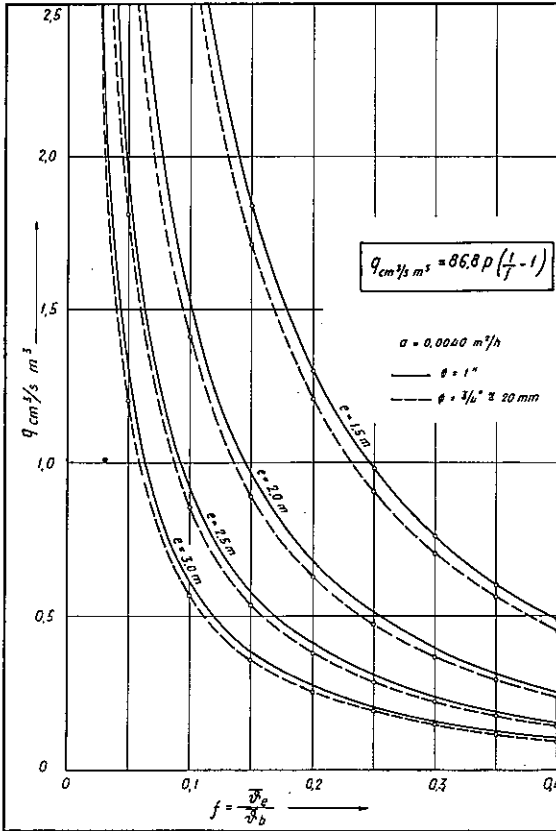


FIG. IV-9. — Débit d'eau en fonction de l'échauffement relatif f de cette eau.

Pour la définition de f , voir équation (IV-37).

Ω , d'autant plus grand que la température finale $\bar{\theta}_{bt}$ est plus basse et que le temps disponible pour l'atteindre est plus court, peut être appelé « degré de réfrigération » ; c'est en somme une caractéristique de la vitesse et de l'intensité de la réfrigération. Il est naturel que l'échauffement relatif f admissible pour l'eau dépende du degré de réfrigération désiré :

$$(IV-47) \quad f = 1 - \frac{\Omega_{(\text{jours}^{-1})}}{24p_{(\text{heures}^{-1})}}$$

L'équation (IV-44) devient ainsi

$$(IV-48) \quad q \text{ l/s} \cdot \text{m}^3 = 0,0868 \frac{\Omega}{24 - \frac{\Omega}{p}}, \quad \text{ou}$$

$$(IV-48') \quad q \text{ cm}^3/\text{s} \cdot \text{m}^3 = 86,8 \frac{\Omega}{24 - \frac{\Omega}{p}}$$

Avec un débit q donné et une densité de tuyaux caractérisée par p , on peut obtenir le degré de réfrigération

$$(IV-49) \quad \boxed{\Omega_{\text{jours}^{-1}} = \frac{24q}{86,8 + \frac{q}{p}}}$$

q étant exprimé en $\text{cm}^3 \text{ eau/s} \cdot \text{m}^3 \text{ béton}$;
 p étant exprimé en h^{-1} .

La figure IV-10 donne le degré de réfrigération Ω en fonction du débit, pour différents écartements des tubes. Ω , qui traduit, par exemple, le nombre de jours nécessaires pour atteindre une température donnée (*), ne varie plus beaucoup dès que le débit dépasse une certaine valeur. On constate, par exemple, que dans le cas de tuyaux écartés de 2,00 m, si l'on double un débit spécifique initialement fixé à $0,1 \text{ cm}^3/\text{s} \cdot \text{m}^3$ (soit $0,052 \text{ l/s}$ pour des serpentins de 150 m de longueur), Ω passe de 0,0175 à 0,0255, c'est-à-dire que la durée

(*) Ω est inversement proportionnel à ce nombre de jours.

diminue de 31 % ; si le débit initial était de $0,6 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$, on diminuerait la durée de 11 % seulement. Avec des serpentins écartés de 3,0 m, on ne diminuerait la durée que de 10 % en faisant passer le débit de $0,3 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$ à $0,6 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$ (soit de 0,35 à 0,70 l/s pour des serpentins de 150 m de longueur) ; enfin, on ne diminuerait la durée que de 11 % en triplant le débit initial.

Ces valeurs se rapportent au cas d'un coefficient de diffusivité $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$, c'est-à-dire d'un béton très bon conducteur de la chaleur ; si la conductibilité est plus faible, comme cela semble être souvent le cas des bétons de chantier, il est clair que les débits-limites qu'il n'est pas intéressant d'augmenter seront aussi plus bas. En effet, ce qui limite surtout la rapidité de la réfrigération, ce n'est pas la transmission de la chaleur du béton à l'eau, mais la difficulté de faire passer la chaleur du centre de la masse jusqu'au voisinage d'un tube ; il est d'autant moins utile d'augmenter le débit d'eau que la chaleur met plus de temps à circuler à l'intérieur du béton même.

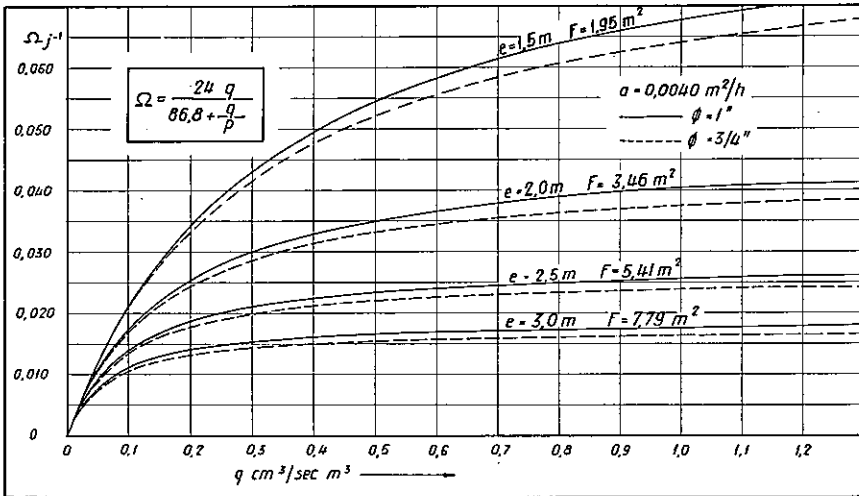


FIG. IV-10. — Degré de réfrigération Ω en fonction du débit d'eau pour différents écartements de tubes disposés en « nids d'abeilles ». Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Etant donné la portée de ces conclusions, nous les rappellerons au paragraphe V-1b), qui résume les règles pratiques du calcul d'un réseau de réfrigération.

Le problème qui se pose le plus fréquemment au praticien consiste à déterminer quel doit être l'écartement des tubes de réfrigération, pour créer une chute de température donnée en un temps déterminé, c'est-à-dire pour réaliser un certain degré de réfrigération Ω . Le graphique IV-11 représente l'écartement des tubes en fonction du débit, pour différentes valeurs de Ω . Pour $\Omega = 0,01$, correspondant, par exemple, à une chute de température moyenne de 95 % en 300 jours, des tubes de 1" doivent être écartés de 3,62 m si le débit vaut $0,2 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$, soit 0,34 l/s pour un serpentín de 150 m ; si l'on double le débit, on peut espacer les tubes légèrement plus,

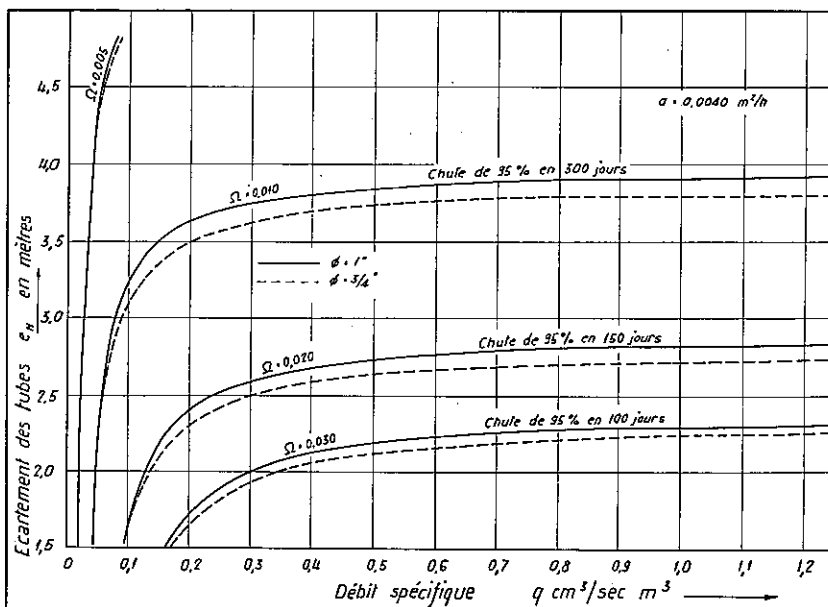


FIG. IV-11. — Ecartement e_H des tubes de réfrigération en fonction du débit pour différents degrés de réfrigération. Réseau en « nids d'abeilles ». Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

jusqu'à 3,80 m ; le gain sur la quantité de tuyaux n'est que de 10 %. Pour obtenir la même chute de température de 95 %, mais en 100 jours seulement, il faut serrer les tubes à 2,18 m si le débit est de 0,5 cm³/s m³, soit 0,31 l/s par serpentín de 150 m de longueur ; en doublant le débit, on pourrait porter l'écartement à 2,29 m ; ici encore, on ne gagnerait que 10 % sur la quantité de tubes.

En conclusion, que l'on considère, soit la durée de la réfrigération, soit la quantité de tuyaux nécessaires, on n'a guère intérêt, dans les conditions normales, à dépasser un débit de 0,3 à 0,4 l/s par serpentín de 150 m de longueur, soit un débit spécifique de 0,3 à 0,5 cm³/s m³.

Le graphique IV-12, enfin, représente le degré de réfrigération Ω en fonction de l'écartement des tubes, pour différentes valeurs du débit. On y constate encore que la valeur du débit ne joue pas un très grand rôle, pourvu qu'elle dépasse un certain minimum ; son influence est d'autant plus faible que l'écartement des tubes est plus grand, ce qui est naturel : tout le processus de la réfrigération est alors essentiellement conditionné par le cheminement de la chaleur à l'intérieur de la masse, et très peu influencé par la transmission de cette chaleur à l'eau des serpentins.

IV - 4. INFLUENCE DU MODE DE DISPOSITION DES TUBES

IV - 4a) Généralités

Pour la commodité des travaux, on doit le plus souvent poser les serpentins sur les arrêts de bétonnage journaliers ; leur écartement est ainsi constant, égal à la hauteur des couches de bétonnage. Seul peut varier, d'une couche à l'autre, l'écartement des tubes formant les serpentins. Il est dès lors impossible de répartir ces tubes uniformément dans la masse, en forme de nid d'abeilles. Au lieu d'occuper le sommet des mailles d'un réseau hexagonal, les tubes se trouveront généralement sur un réseau à mailles rectangulaire, la hauteur des rectangles étant égale à celle des couches de béton, et la largeur à l'écartement horizontal des tubes. Le calcul exposé ci-dessous

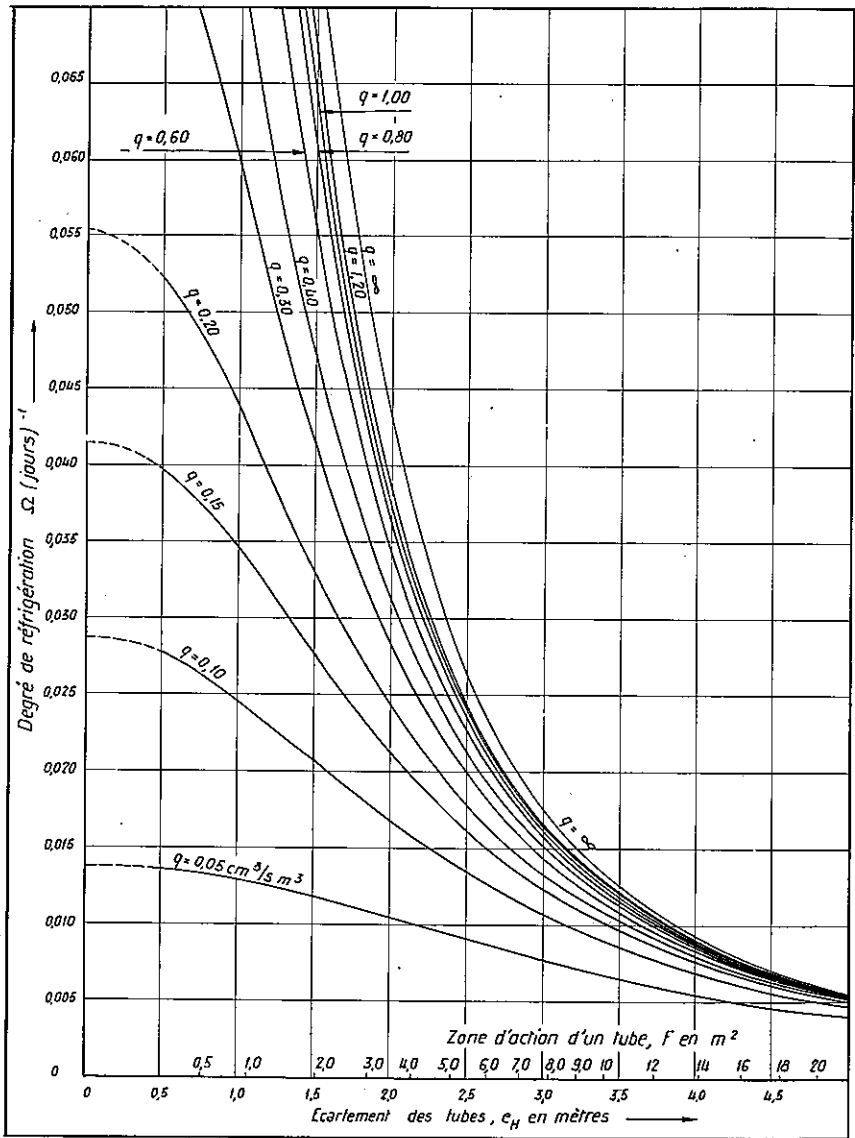


FIG. IV-12. — Degré de réfrigération Ω en fonction de l'écartement des tubes pour différentes valeurs du débit. Réseau en « nids d'abeilles ». Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

est alors beaucoup plus long que celui d'un réseau en nid d'abeilles ; il est en pratique suffisant de calculer la densité du réseau dans un système hexagonal équivalent, en apportant une correction pour tenir compte de la disposition réelle des tuyaux.

IV - 4b) Méthode de calcul d'un réseau rectangulaire

Soit un réseau rectangulaire, dont les mailles présentent une largeur l et une hauteur h . L'influence d'un tube de réfrigération unique placé dans un milieu indéfini a déjà été calculée au paragraphe IV-1, dans l'hypothèse que la température à la périphérie du tube s'abaisse brusquement de θ_0 à 0° C, puis se maintient à cette valeur ; le principe de superposition permet d'utiliser la solution de ce problème pour calculer la température en un point de coordonnées (x, y) , sous l'effet des différents tubes du réseau. En pratique, il suffira de considérer les tubes situés dans un certain périmètre au voisinage du point considéré, les tubes situés à grande distance ne jouant qu'un rôle négligeable. Malgré cela, les calculs numériques sont longs.

Il est ici tout indiqué d'exprimer l'équation fondamentale en coordonnées cartésiennes :

$$(IV-50) \equiv (I-4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right).$$

La fonction exponentielle intégrale

$$(IV-11') \quad \varphi(x, y, t) = - Ei \left(- \frac{x^2 + y^2}{4at} \right)$$

est encore solution de (IV-50) ; elle correspond à l'effet d'une source de chaleur (ou d'un tube de réfrigération) placée à l'origine des coordonnées. A l'ensemble des tubes placés sur les mailles du réseau correspond la fonction

$$(IV-51) \quad \Phi(x, y, t) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} - Ei \left[- \frac{(x - ml)^2 + (y - nh)^2}{4at} \right]$$

valable pour $t > 0$.

On convient de poser $\Phi \equiv 0$ pour $t < 0$.

Toute combinaison linéaire de solutions de (IV-50) est elle-même une solution ; c'est le cas de la fonction

$$(IV-52) \quad \Psi(x, y, t_n) = \sum a_i \Phi(x, y, t_n - t_i)$$

dont les coefficients a_i se calculent comme il est indiqué au paragraphe IV-1b), de telle façon que

$$(IV-53) \quad \Psi(r_0, 0, t_n) = 1.$$

La température locale θ est alors

$$(IV-54) \quad \theta = \theta_0 (1 - \psi).$$

Pour calculer la température moyenne $\bar{\theta}$ au temps t , la méthode la plus simple consiste à établir le bilan thermique.

Comme on l'a déjà vu (paragraphe IV-1a), la fonction φ correspond à un dégagement de chaleur constant de $4\pi\lambda$ calories par heure et par m^2 de tuyau depuis l'origine des temps jusqu'au temps t . La fonction Φ correspond à un dégagement de chaleur $4\pi\lambda$ calories par heure sur chaque maille du réseau. Or chaque maille représente un volume de béton $V = l.h.1$. Un terme $a_i\Phi(x, y, t_n - t_i)$ correspond à un dégagement de $4a_i\pi\lambda$ calories/heure pendant $(t_n - t_i)$ heures, soit $4a_i\pi\lambda(t_n - t_i)$ calories dans chaque maille. Il en résulte une élévation de la température moyenne de la maille, de

$$(IV-55) \quad \Delta\bar{\theta} = \frac{4a_i\pi\lambda(t_n - t_i)}{c.V.\gamma}$$

où c = chaleur spécifique du béton ;

γ = poids spécifique du béton ;

V = volume correspondant à la zone d'action d'un tube.

La diffusivité a étant égale à

$$(IV-56) \quad a = \frac{\lambda}{c\gamma}$$

on a

$$(IV-57) \quad \Delta\bar{\theta} = \frac{4a_i\pi(t_n - t_i)}{V} a.$$

En découpant le temps, depuis l'origine jusqu'à t_n , en intervalles $(t_n - t_0)$, $(t_n - t_1)$, ... $(t_n - t_i)$..., on aura, sous l'effet, non pas de sources de chaleur mais de tubes de réfrigération produisant chacun une chute de température θ_0 à leur périphérie, la température moyenne

$$(IV-58) \quad \bar{\theta}(t) = \theta_0 \left[1 - \frac{4\pi a}{V} \sum a_i (t_n - t_i) \right].$$

La quantité de chaleur à évacuer par heure est

$$(IV-59) \quad w(t) = 4\pi\lambda \sum a_i \text{ Cal/h.}$$

IV - 4c) Résultats numériques

Le calcul de trois réseaux rectangulaires, à mailles de

$$1,50 \times 3,00 \text{ m,}$$

$$3,00 \times 3,00 \text{ m,}$$

$$4,50 \times 3,00 \text{ m,}$$

est résumé par le graphique IV-13, pour le cas de tubes de diamètre 1" et d'un débit d'eau infini (température des tubes maintenue constante). En regard de l'évolution de la température moyenne corres-

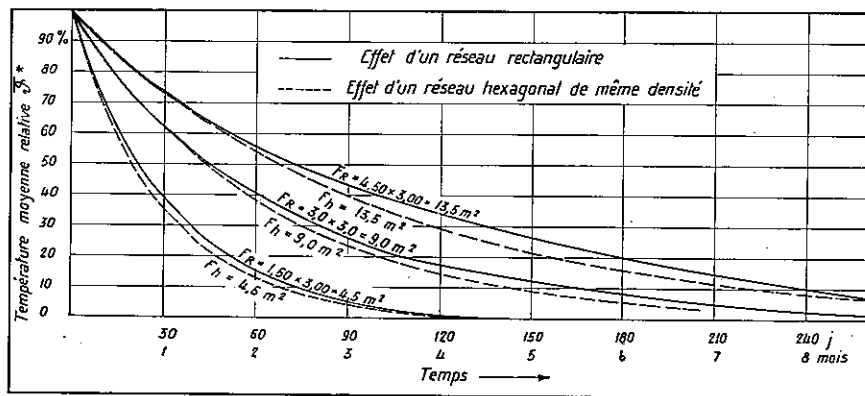


FIG. IV-13. — Effet de réseaux « rectangulaires ». Comparaison avec l'effet de réseaux hexagonaux (« nids d'abeilles ») de même densité.

Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h.}$

pendant à chaque grandeur de mailles des réseaux rectangulaires, on a reporté la température produite par un réseau hexagonal dont les mailles auraient la même section. On constate que le réseau hexagonal produit une baisse de température plus rapide, autrement dit que son rendement est meilleur, ce qui est évident. La différence s'atténue toutefois après un temps suffisamment long.

La comparaison des graphiques IV-13 et IV-8 permet d'évaluer quel devrait être l'écartement e_H des tubes d'un réseau hexagonal pour produire, en un temps donné, une réfrigération semblable à celle de l'un quelconque des trois réseaux rectangulaires. Le graphique IV-10 ou IV-11 permet un calcul plus exact encore, dont le résultat est reproduit par le graphique IV-14. Les réseaux rectangulaires ont une efficacité semblable à celle de réseaux hexagonaux (nids d'abeilles) dont les tubes auraient une zone d'action légèrement plus grande, comme le montre le tableau ci-dessous :

Section des mailles équivalentes		$\frac{F_H}{F_R}$
Réseau rectangulaire F_R	Réseau hexagonal F_H	
$1,5 \times 3,0 = 4,5 \text{ m}^2$	4,82 m ²	1,07
$3,0 \times 3,0 = 9,0 \text{ m}^2$	9,61 m ²	1,07
$4,5 \times 3,0 = 13,5 \text{ m}^2$	14,65 m ²	1,09

Dans les conditions envisagées, où les côtés des mailles sont dans un rapport compris entre 1 : 1 et 1 : 2, un réseau rectangulaire se comporte comme un « nid d'abeilles » dont les tubes devraient réfrigérer une zone d'action de 7 à 9 % plus grande.

Pour le calcul, on admettra donc que le réseau des tubes de réfrigération est rectangulaire. Le calcul d'un tel réseau étant beaucoup plus long que celui d'un « nid d'abeilles », on pourra se contenter, les exemples ci-dessus ayant montré que la différence est assez faible, d'assimiler le réseau réel à un réseau hexagonal, dont les mailles auraient une section d'environ 10 % supérieure à celle des rectangles.

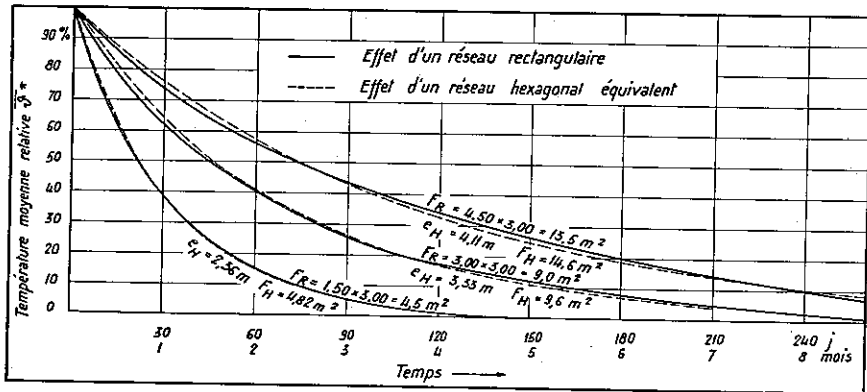


FIG. IV-14. — Effet de réseaux rectangulaires.
 Comparaison avec des réseaux hexagonaux (« nids d'abeilles »)
 de même efficacité.
 Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

IV - 5. INFLUENCE DU DÉGAGEMENT DE CHALEUR PENDANT LA PRISE DU BÉTON

IV - 5a) Généralités

Dans ce qui précède, on a supposé qu'au moment où la réfrigération commence, le dégagement de chaleur du ciment est achevé, ce qui, pour les ciments Portland ordinaires, est à peu près le cas cinq à sept jours après le bétonnage. Les essais de laboratoire confirment qu'en une semaine, le ciment dégage en effet 90 % environ de sa chaleur de prise, le solde n'étant libéré que très lentement au cours de plusieurs mois. On avait donc admis qu'à l'origine de la réfrigération, la température du béton était encore uniforme et le dégagement de chaleur interne nul.

Or la question se pose fréquemment de savoir s'il est utile ou non de commencer la réfrigération dès les tout premiers jours, pendant que le béton dégage encore sa chaleur.

D'autre part, on a souvent préconisé pour la construction des barrages l'emploi d'un ciment spécial, à dégagement de chaleur très

lent, comme on en a utilisé sur plusieurs chantiers, américains surtout. Il convient de se rendre compte de l'influence de ces ciments sur l'évolution de la réfrigération.

Nous avons donc choisi trois bétons fabriqués avec des liants de nature bien différente, dont l'échauffement, en régime adiabatique, correspond aux courbes du graphique IV-15, lesquelles résultent d'essais. Le premier liant est un ciment Portland au dosage de 250 kg CP/m³, à dégagement de chaleur assez rapide ; le deuxième un ciment de laitier contenant 30 % de ciment Portland et 70 % de laitier ; le troisième, un mélange de 50 % de clinker et 50 % de pouzzolane, dosé à 300 kg de mélange par m³ de béton.

IV - 5b) Méthode de calcul

Compte tenu du dégagement de chaleur interne, sous l'effet de la prise du ciment, l'équation générale de la température s'écrit

$$(IV-60) \equiv (I-4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{\lambda} w(t) \right]$$

où $w(t)$ représente la quantité de chaleur dégagée par unité de temps et de volume. Pour la commodité du calcul, les courbes expérimentales d'échauffement adiabatique (voir graphique IV-15) ont été

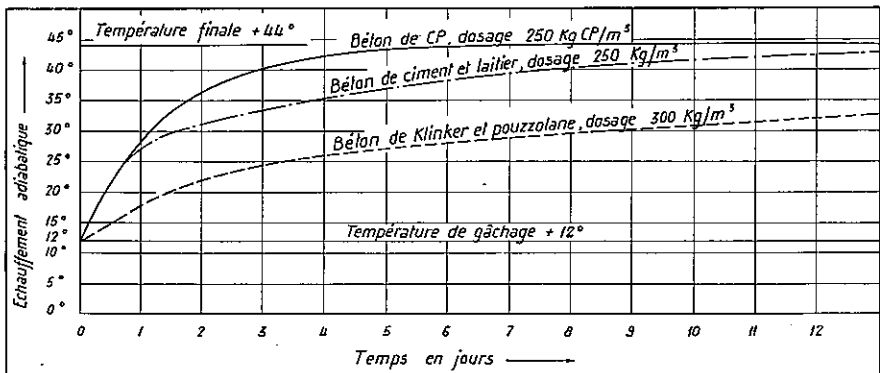


FIG. IV-15. — Courbes d'échauffement adiabatique de bétons préparés avec trois liants différents

remplacées par des fonctions analytiques, qui les représentent suffisamment bien à partir de l'âge de 24 heures ; leur forme correspond à l'équation générale

$$(IV-61) \quad \Theta = \Theta_A - \Theta_B e^{-\beta_1 \tau} - \Theta_C e^{-\beta_2 \tau} \quad (*)$$

où $\tau = t - 24$ heures ;

Θ_A , Θ_B et Θ_C ont la signification indiquée sur la figure IV-16 ;
 β_1 et β_2 sont des coefficients caractéristiques du liant considéré.

Pour $t = 24$ heures, $\tau = 0$, on a :

$$\Theta = \Theta_0 = \theta_0 = \Theta_A - (\Theta_B + \Theta_C).$$

On calcule aisément la quantité de chaleur dégagée à chaque instant par le ciment :

$$(IV-62) \quad w(t) = c\gamma \frac{\partial \Theta}{\partial t} = c\gamma (\beta_1 \Theta_B e^{-\beta_1 \tau} + \beta_2 \Theta_C e^{-\beta_2 \tau}).$$

c = chaleur spécifique du béton = 0,22 Cal/kg °C ;

γ = poids spécifique du béton = 2500 kg/m³.

Il s'agit d'intégrer l'équation (IV-60) dans le domaine $r_0 < r < R$, pour $t > 24$ heures, sachant qu'à l'âge de 24 heures, la température du massif est θ_0 , uniforme, égale à celle qu'atteint à ce moment le béton en régime adiabatique.

Les conditions aux limites sont

$$\text{pour } \begin{array}{ll} r = r_0 & \theta = \theta_{\text{can}} ; \\ r = R & \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0. \end{array}$$

La solution de ce problème, établie par l'Institut de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne, est analogue à celle qui a été exposée au paragraphe IV-2.

On pose pour la température cherchée :

$$(IV-63) \quad \theta = \theta_1 + \theta_2.$$

(*) Nous représentons ici par Θ les températures du béton en régime adiabatique, et par θ les températures du béton soumis à la réfrigération.

θ_1 satisfait à l'équation (IV-60) et aux conditions aux limites, mais non à la condition initiale. On peut vérifier que θ_1 doit être de la forme

$$(IV-64) \quad \theta_1 = R_1(r) e^{-\beta_1 \tau} + R_2(r) e^{-\beta_2 \tau}$$

ce qui conduit à

$$(IV-64') \quad \theta_1 = \sum_{i=1}^{i=2} \Theta_i e^{-\beta_i \tau} \left\{ \frac{N_1(Z_i) J_0(z_i) - J_1(Z_i) N_0(z_i)}{N_1(Z_i) J_0(z_{i0}) - J_1(Z_i) N_0(z_{i0})} - 1 \right\}$$

où $z_i = r \sqrt{\frac{\beta_i}{a}}$; $Z_i = R \sqrt{\frac{\beta_i}{a}}$; $z_{i0} = r_0 \sqrt{\frac{\beta_i}{a}}$.

J et N représentent les fonctions de Bessel déjà citées.

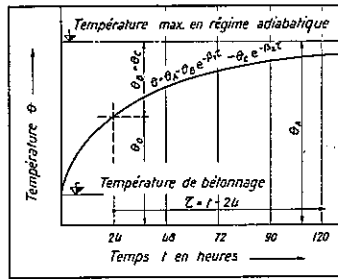


FIG. IV-16. — Définition analytique de la courbe d'élévation de température adiabatique du béton.

θ_2 satisfait à l'équation homogène (IV-60') (c'est-à-dire à l'équation (IV-60) dans laquelle on pose $\omega = 0$), et aux conditions aux limites. Aucune des deux fonctions θ_1 et θ_2 ne satisfait à la condition initiale, mais on peut imposer que leur somme y satisfasse, c'est-à-dire que pour $\tau = 0$ on ait $\theta_1 + \theta_2 = \Theta_0$. Ainsi, la fonction (IV-63) satisfait bien à toutes les conditions du problème.

La fonction θ_2 prend la forme

$$(IV-65) \quad \theta_2 = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Theta_0 + \frac{\beta_1 \Theta_1}{\beta_1 - a \alpha_n^2} + \frac{\beta_2 \Theta_2}{\beta_2 - a \alpha_n^2} \right] \frac{J_1^2(\alpha_n R)}{J_0^2(\alpha_n r_0) - J_1^2(\alpha_n R)} \times \\ \times [N_0(\alpha_n r_0) J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n r_0) N_0(\alpha_n r)] e^{-a \alpha_n^2 \tau}$$

où les coefficients α_n sont les racines de l'équation

$$(IV-66) \quad J_0(\alpha_n r_0) N_1(\alpha_n R) - J_1(\alpha_n R) N_0(\alpha_n r_0) = 0.$$

IV - 5c) Résultats numériques

Pour les bétons fabriqués avec les trois ciments considérés, l'équation (IV-61) de l'élévation de température adiabatique prend les valeurs suivantes :

avec le ciment Portland

$$\Theta = 44^\circ - 16^\circ e^{-0,03166 \tau};$$

$$\Theta_0 = 28^\circ;$$

avec le ciment de laitier

$$\Theta = 44^\circ - 16^\circ e^{-0,003785 \tau};$$

$$\Theta_0 = 28^\circ;$$

avec le liant de pouzzolane

$$\Theta = 44^\circ - 20,56^\circ e^{-0,002079 \tau} - 5,74^\circ e^{-0,03747 \tau};$$

$$\Theta_0 = 17,7^\circ.$$

Les résultats des calculs sont donnés par les graphiques IV-17 et IV-18.

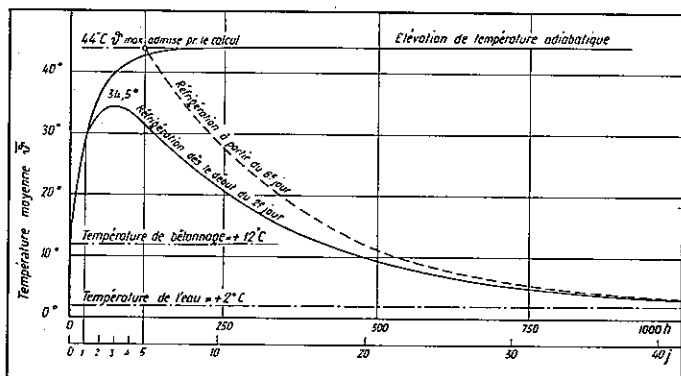


FIG. IV-17. — Influence de l'époque à laquelle commence la réfrigération.
Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

Pour mettre en évidence le rôle de la réfrigération et l'influence de l'époque à laquelle commence la réfrigération, on a choisi, d'une part, un béton dont la température, en régime adiabatique, monte rapidement assez haut : béton mis en œuvre en été, à une température initiale de 12° , et dosage relativement élevé de 250 kg CP/m^3 ;

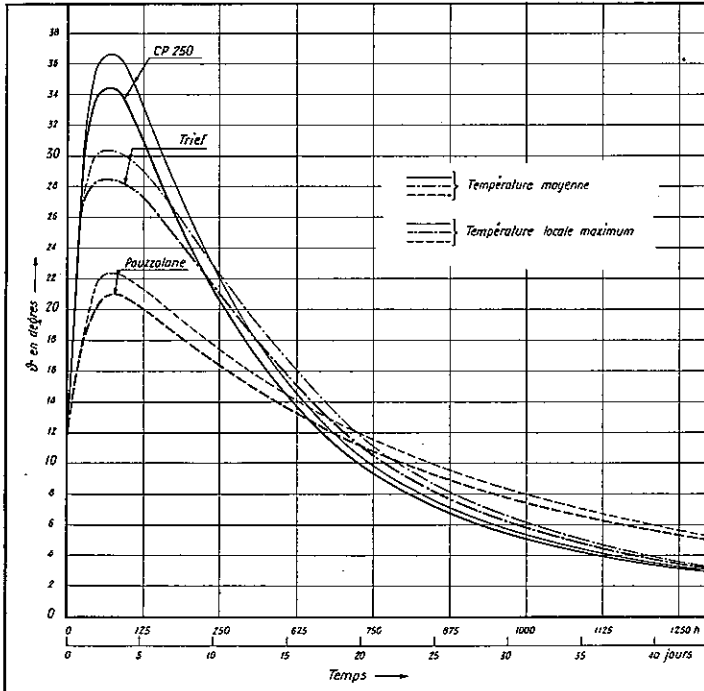


FIG. IV-18. — Influence de la rapidité de dégagement de chaleur de prise du liant.

Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

il atteindrait en une semaine environ 44°C . On a supposé d'autre part un réseau de tubes de réfrigération très serré (nid d'abeilles à mailles de $1,50 \text{ m}$) alimenté par de l'eau très froide, provenant d'un glacier, à $+2^{\circ} \text{C}$.

Le graphique IV-17 montre que, dans ces conditions extrêmes, la température moyenne du béton monte à $34,5^{\circ}$ si la réfrigération

commence à l'âge de 24 heures, tandis qu'elle atteint un *maximum momentané* d'environ 9 à 10° C plus élevé si l'on retarde la réfrigération jusqu'au début du sixième jour.

On peut trouver un certain intérêt à commencer la réfrigération très tôt si l'on veut atténuer la première montée de température du béton ; le maximum atteint peut être ainsi diminué d'environ 5° C dans les cas courants et de 10° C dans les cas extrêmes de bétons à dégagement de chaleur élevé, réfrigérés très énergiquement.

L'influence de la *nature du ciment*, c'est-à-dire de la rapidité de son échauffement, ressort du graphique IV-18 : le ciment de laitier, qui s'échauffe plus lentement que le Portland, atteint une température maximum moins élevée (alors même qu'après une durée de quelques semaines, il a dégagé au total le même nombre de calories) ; mais cet avantage, si c'en est un, peut devenir un inconvénient plus tard : à l'âge d'une quinzaine de jours, le béton de ciment Portland, qui a pratiquement terminé son dégagement de chaleur, est en pleine phase de refroidissement ; le ciment de laitier, lui, dégage encore de la chaleur, ce qui ralentit sa réfrigération, de sorte que sa température reste plus élevée que celle du Portland. Il est vrai que cette différence s'atténue ensuite et devient négligeable après deux mois.

La gêne apportée à la réfrigération par le dégagement tardif de la chaleur de prise est encore beaucoup plus sensible avec la pouzzolane ; la température maximum atteinte est relativement modérée (22° C contre 37° pour le Portland et 30° pour le ciment de laitier), mais la réfrigération est si retardée qu'il devient impossible de l'achever en même temps que celle des autres bétons.

IV - 6. INFLUENCE D'UN ARRÊT DE LA CIRCULATION D'EAU. STABILISATION DES TEMPÉRATURES

Pendant la période de réfrigération, il est bon de contrôler la température du béton à intervalles réguliers, par exemple une fois par mois, de manière à déceler en temps utile une défectuosité éventuelle de l'installation. L'un des moyens les plus simples de faire ce contrôle consiste à interrompre temporairement la circulation de

l'eau dans les serpentins et à mesurer la température de cette eau après un certain temps de stagnation.

Tant que l'eau circule et refroidit le béton, les températures sont inégalement distribuées dans la masse ; quand la circulation est arrêtée, les températures tendent à s'égaliser pour se stabiliser à la valeur moyenne ; simultanément, la température de l'eau stagnante s'élève à cette valeur moyenne du béton, celle que l'on désire précisément connaître. La question qui se pose est d'évaluer la durée nécessaire pour atteindre un état suffisamment proche de l'équilibre thermique.

Du point de vue mathématique, le problème peut s'énoncer ainsi :

Un cylindre circulaire de rayon R , isolé thermiquement, est à une température donnée, fonction, à l'instant considéré, de la distance à l'axe seulement ; étudier l'évolution spontanée de sa température au cours du temps, et déterminer, en particulier, après combien de temps la température de l'axe est pratiquement égale à la température moyenne de la masse. On conviendra que c'est le cas, par exemple, quand leur différence n'est plus que 5 % ou 10 % de ce qu'elle était initialement. Nous admettrons que les tubes et l'eau de réfrigération se comportent comme le béton, ce qui est légitime en raison du faible volume des tubes par rapport à celui du béton.

Si nous appelons t_0 l'instant origine de la réfrigération, t_s celui du début de la stagnation de l'eau et t un instant quelconque, la température d'un point du cylindre est donnée, dès l'instant t_s , par l'équation

$$(IV-67) \quad \theta(r, t) = C_0 + \sum_1^{\infty} C_n J_0(\eta_n) e^{-u_n(t-t_s)}$$

où J_0 représente la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre zéro ;

C_n et u_n sont des constantes à déterminer au moyen des conditions initiales et sur le contour.

Par définition

$$(IV-68) \quad \eta_n = r \sqrt{\frac{u_n}{a}} ; \quad \eta_{n0} = r_0 \sqrt{\frac{u_n}{a}} ; \quad H_n = R \sqrt{\frac{u_n}{a}} ; \\ R = K r_0, \quad \text{donc} \quad H_n = K \eta_{n0}.$$

Au bout d'un temps infini, la température en chaque point tend vers $\bar{\theta}$, température moyenne qui, à partir de t , ne varie plus, puisque le cylindre est supposé isolé. Il en résulte immédiatement que

$$(IV-69) \quad C_0 = \bar{\theta}.$$

Les exposants u_n se calculent au moyen de la condition de bord

$$(IV-70) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad \text{pour} \quad r = R$$

d'où

$$(IV-70') \quad J_0'(H_n) = J_0' \left(R \sqrt{\frac{u_n}{a}} \right) = 0.$$

Or $J_0'(x) = -J_1(x)$, donc $R \sqrt{\frac{u_n}{a}}$ est une racine de l'équation

$$(IV-71) \quad J_1(H_n) = J_1 \left(R \sqrt{\frac{u_n}{a}} \right) = 0.$$

Soient $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$, les racines de cette équation, classées par ordre croissant, que l'on trouve dans les tables de fonctions de Bessel ⁽¹³⁾; on en tire

$$(IV-68'') \quad u_n = \frac{a H_n^2}{R^2}.$$

En particulier

$$(IV-68''') \quad u_1 = \frac{a}{R^2} (3,8317)^2 = \frac{14,6819 a}{R^2}.$$

Les coefficients C_n se calculent en exprimant que, au temps t_s , l'état de température est celui qui résulte de la réfrigération, selon l'équation (IV-20). On trouve

$$(IV-72) \quad C_n = - \frac{J_0(\eta_{n0}) K^2 y_0^2}{J_0^2(H_n) (H_n^2 - K^2 y_0^2)} \bar{\theta}$$

où y_0 représente la solution de l'équation (IV-24) et $K = \frac{R}{r_0}$.

⁽¹³⁾ Par exemple celle de JAHNKE et EMDE, *loc. cit.*, page 89.

En particulier

$$(IV-72') \quad C_1 = - \frac{J_0 \left(\frac{3,8317}{K} \right) K^2 y_0^2}{J_0^2(3,8317) (14,6819 - K^2 y_0^2)} \bar{\theta} = c_1 \bar{\theta}.$$

A partir d'un certain nombre d'heures, de l'ordre de 24 heures en général, les termes d'ordre supérieur à 1 dans l'équation (IV-67) peuvent être négligés ; la température en un point quelconque est donnée dès lors par l'équation

$$(IV-67') \quad \theta(r, t) = \bar{\theta} + C_1 J_0(\eta_1) e^{-u_1(t-t_s)}.$$

Sur l'axe, $\eta_{10} = 0$ et $J_0(\eta_{10}) = 1$, de sorte que

$$(IV-67'') \quad \theta(0, t) = \bar{\theta} + C_1 e^{-u_1(t-t_s)}.$$

Si l'on pose

$$(IV-73). \quad C_1 = -c_1 \bar{\theta}$$

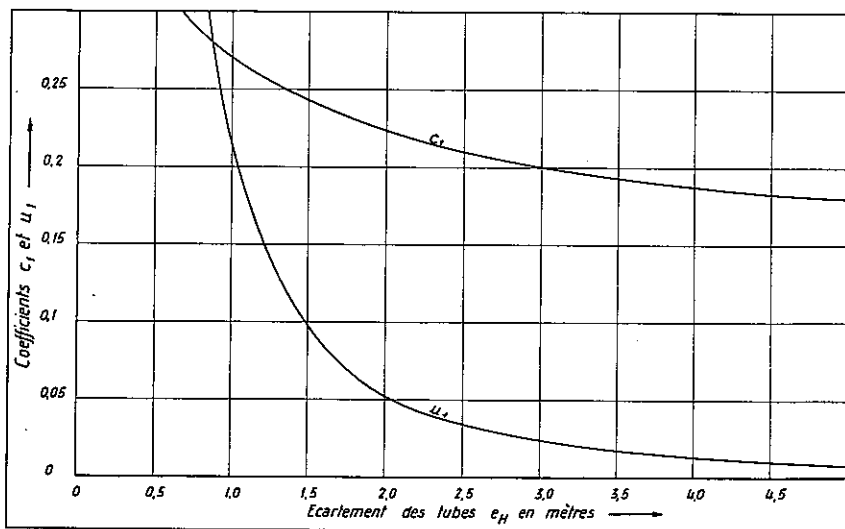


FIG. IV-19. — Stabilisation des températures.

Coefficients c_1 et u_1 de l'équation (IV-74) :

$$\theta(0, t) = \bar{\theta} [1 - c_1 e^{-u_1(t-t_s)}]$$

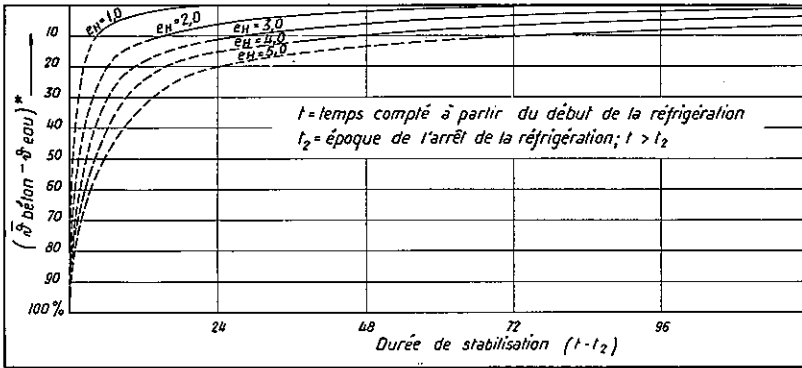


FIG. IV-20. — Stabilisation des températures.

Différence entre la température moyenne du béton et la température de l'eau, rapportée à la différence existant au moment de l'arrêt de la réfrigération.

on obtient

$$(IV-74) \quad \theta(0, t) = \bar{\theta} [1 - c_1 e^{-u_1(t-t_2)}].$$

Les valeurs de c_1 et u_1 données par les formules (IV-68'') et (IV-72') allée à (IV-73), sont représentées dans le graphique IV-19, pour un coefficient de diffusivité $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$ et des tubes de 20 mm de diamètre. Ces valeurs, introduites dans la formule (IV-74), ont permis de tracer le graphique IV-20. On constate qu'après un jour de stagnation de l'eau, la température du béton est tout à fait stabilisée si les tubes sont écartés de 1 m (zone d'action $0,87 \text{ m}^2$) ; au bout de deux jours, la stabilisation (réduction de l'écart entre la température de l'eau et la moyenne du béton) est de 98 % pour des tubes écartés de 2 m (zone d'action $3,45 \text{ m}^2$) et de 90 % pour des tubes écartés de 4 m (zone d'action $13,8 \text{ m}^2$).

Les observations faites au barrage de la Grande-Dixence, sur des serpentins dont les tubes avaient une zone d'action d'environ 6 m^2 , ont effectivement montré qu'après 24 heures de stagnation déjà, la température de l'eau ne variait presque plus.

CHAPITRE V

RÉFRIGÉRATION ARTIFICIELLE DU BÉTON AU MOYEN D'UNE CIRCULATION D'EAU

(suite)

PARTIE PRATIQUE

V - 1. RÉSUMÉ DES RÉSULTATS THÉORIQUES ET RÈGLES PRATIQUES

V - 1a) Calcul de l'écartement des tubes ou de la durée de réfrigération

Le praticien peut se trouver en face de deux problèmes : ou bien, juger des possibilités d'un réseau de réfrigération donné, ou bien, au contraire, déterminer l'écartement des tuyaux nécessaire pour réaliser une réfrigération donnée. Deux graphiques permettent de résoudre très rapidement ces deux problèmes, comme on peut le voir sur les exemples suivants :

Premier exemple : On dispose d'un réseau formé de tuyaux de $\varnothing \frac{3}{4}$ " écartés de 2,0 m en plan et de 3,20 m en hauteur ; chaque serpentin, de 200 m de longueur, est alimenté par un débit de 0,5 litre/s d'eau à +4° C. On demande la durée nécessaire pour abaisser la température du béton de +40° C à +6° C.

Zone d'action d'un tube du réseau

donné (rectangulaire) : $F_R = 2,0 \times 3,20 = 6,40 \text{ m}^2$

Zone d'action équivalente d'un

tube d'un réseau hexagonal : $F_H = 1,1 \times 6,40 = 7,0 \text{ m}^2$

Ecartement des tubes équivalent : $e_H = \sqrt{\frac{F_H}{0,867}} = 2,85 \text{ m}$

Volume de béton intéressé par

un serpentín : $V = 7,0 \text{ m}^2 \times 200 \text{ m} = 1400 \text{ m}^3$

Débit spécifique : $q = \frac{500 \text{ cm}^3/\text{s}}{1400 \text{ m}^3} = 0,358 \text{ cm}^3/\text{s} \cdot \text{m}^3$

Le degré de réfrigération Ω réalisé par le réseau donné est indiqué par le graphique V-1 (*)

$$\Omega = 0,0163 \text{ jours}^{-1}.$$

La température finale désirée surpasse celle de l'eau de $\bar{\theta}_{bt} - \theta_e = 6^\circ - 4^\circ = 2^\circ \text{ C}$, alors que la température initiale la dépasse de $\bar{\theta}_{bo} - \theta_e = 40^\circ - 4^\circ = 36^\circ \text{ C}$; la durée nécessaire ressort de la formule (IV-46)

$$\Omega = - \frac{\ln \frac{\bar{\theta}_{bt} - \theta_e}{\bar{\theta}_{bo} - \theta_e}}{t_{\text{jours}}}.$$

Le calcul numérique peut être évité par l'emploi d'un nomogramme, graphique V-2. On trouve

pour $\frac{\bar{\theta}_{bt} - \theta_e}{\bar{\theta}_{bo} - \theta_e} = \frac{2^\circ}{36^\circ} = 5,55 \%$ et $\Omega = 0,0163 \text{ jours}^{-1}$;

$$t = 178 \text{ jours}.$$

Deuxième exemple : La hauteur des couches de bétonnage étant de 3,0 m, on demande quel doit être l'écartement des tubes des serpentins, $\varnothing \frac{3}{4}$ ", pour que la température du béton s'abaisse de 35° à 5° C en quatre mois, le débit spécifique étant de $0,2 \text{ cm}^3/\text{s} \cdot \text{m}^3$ et la température de l'eau 2° C à l'entrée des serpentins.

Pour $t = 120 \text{ jours}$ et $\frac{\bar{\theta}_{bt} - \theta_e}{\bar{\theta}_{bo} - \theta_e} = \frac{5^\circ - 2^\circ}{35^\circ - 2^\circ} = 9,1 \%$

le nomogramme V-2 donne le degré de réfrigération

$$\Omega = 0,0199.$$

On lit sur le graphique V-1 :

$$e_H = 2,32 \text{ m}, \text{ soit } F_H = 4,66 \text{ m}^2.$$

(*) Pour des raisons de commodité, nous donnons à nouveau ici le graphique déjà donné sous numéro IV-12. Ce graphique et le suivant, V-2, sont en fait les seuls nécessaires pour le calcul pratique d'un réseau de réfrigération.

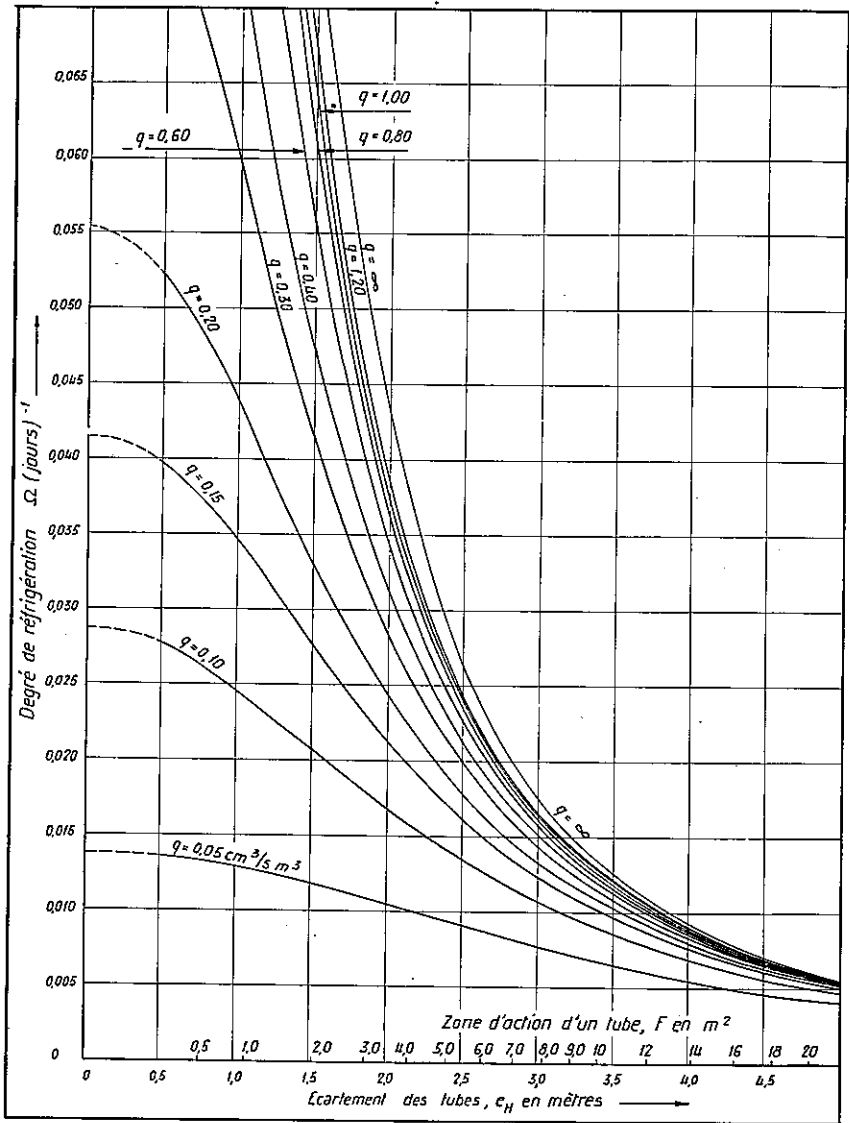


FIG. V-I. — Degré de réfrigération en fonction de l'écartement des tubes pour différentes valeurs du débit. Réseau en « nids d'abeilles ». Diffusivité : $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$.

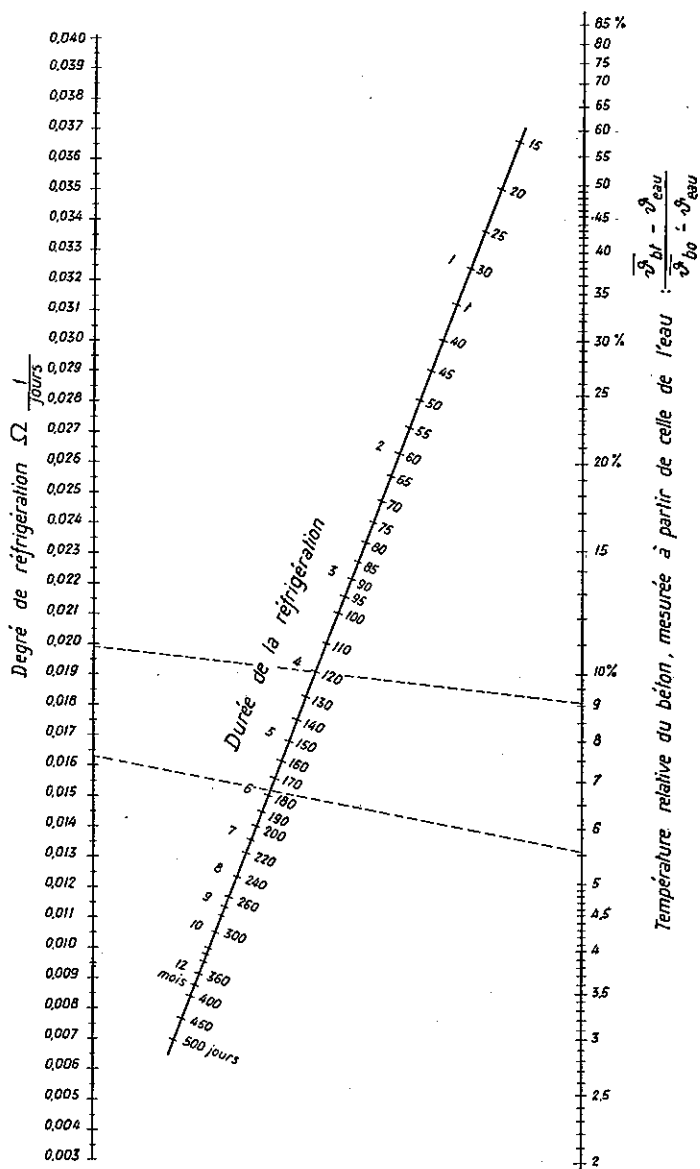


FIG. V-2. — Nomogramme. Température résiduelle relative en fonction du degré de réfrigération et de la durée de réfrigération.

Pour que le réseau rectangulaire ait la même efficacité que le nid d'abeilles théorique, il faut que ses mailles aient une section plus faible d'environ 10 %, soit $4,2 \text{ m}^2$.

Écartement des tubes : $4,2 \text{ m}^2 : 3,0 \text{ m} = 1,40 \text{ m}$.

V - 1b) Influence du débit d'eau de réfrigération

Il ne vaut pas la peine d'augmenter le débit au delà d'une certaine limite.

Telles sont, en résumé, les conclusions du paragraphe IV-3b). La figure IV-10 montre, par exemple, que dans le cas de tuyaux écartés de 2,00 m, si l'on double un débit spécifique initialement fixé à $0,1 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$ (soit 0,052 l/s pour des serpentins de 150 m de longueur), Ω passe de 0,0175 à 0,0255, c'est-à-dire que la durée diminue de 31 % ; si le débit initial était de $0,6 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$, on diminuerait la durée de 11 % seulement en doublant le débit. Avec des serpentins écartés de 3,0 m, on ne diminuerait la durée que de 10 % en faisant passer le débit de $0,3 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$ à $0,6 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$ (soit de 0,35 à 0,70 l/s pour des serpentins de 150 m de longueur) ; enfin, on ne diminuerait la durée que de 11 % en triplant le débit initial.

Ces valeurs se rapportent au cas d'un coefficient de diffusivité $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$, c'est-à-dire d'un béton très bon conducteur de la chaleur ; si la conductibilité est plus faible, comme cela semble être souvent le cas des bétons de chantier, il est clair que les débits-limites qu'il n'est pas intéressant d'augmenter seront aussi plus bas. En effet, ce qui limite surtout la rapidité de la réfrigération, ce n'est pas la transmission de la chaleur du béton à l'eau, mais la difficulté de faire passer la chaleur du centre de la masse jusqu'au voisinage d'un tube ; il est d'autant moins utile d'augmenter le débit d'eau que la chaleur met plus de temps à circuler à l'intérieur du béton même.

Pour un réseau donné, l'augmentation du débit d'eau ne permet pas de raccourcir notablement la durée de la réfrigération ; pour une durée donnée, l'augmentation du débit ne permet pas non plus de réaliser un gain appréciable sur la quantité de tuyaux nécessaires. On constate, d'après le graphique IV-11, que, pour obtenir un degré

de réfrigération $\Omega = 0,01$, c'est-à-dire, par exemple, une chute de température moyenne de 95 % en 300 jours, il faut donner un écartement de 3,62 m à des tubes de 1" de diamètre, si le débit est de $0,2 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$, soit de 0,34 l/s pour un serpentin de 150 m ; si l'on double le débit, on ne peut augmenter que légèrement l'écartement des tubes, jusqu'à 3,80 m ; le gain sur la quantité de tuyaux n'est que de 10 %. Pour obtenir la même chute de température de 95 %, mais en 100 jours seulement, il faut serrer les tubes à 2,18 m si le débit est de $0,5 \text{ cm}^3/\text{s m}^3$, soit 0,31 l/s par serpentin de 150 m de longueur ; en doublant le débit, on pourrait porter l'écartement à 2,29 m ; ici encore, on ne gagnerait que 10 % sur la quantité de tubes.

En conclusion, que l'on considère, soit la durée de la réfrigération, soit la quantité de tuyaux nécessaires, on n'a guère d'intérêt, dans les conditions normales, à dépasser un débit de 0,3 à 0,4 l/s par serpentin de 150 m de longueur, soit un débit spécifique de 0,3 à 0,5 $\text{cm}^3/\text{s m}^3$.

V - 1c) Influence du mode de disposition des tubes

Les réseaux « rectangulaires » ont une efficacité semblable à celle de réseaux « hexagonaux » (nids d'abeilles) dont les tubes auraient une zone d'action légèrement plus grande, comme le montre le tableau de la page 116.

Dans les conditions envisagées, où les côtés des mailles sont dans un rapport compris entre 1 : 1 et 1 : 2, un réseau rectangulaire se comporte comme un « nid d'abeilles » dont les tubes devraient réfrigérer une zone d'action 7 à 9 % plus grande.

L'efficacité serait un peu meilleure si les tubes étaient décalés en quinconce d'une couche à l'autre, de manière à se trouver aux sommets de losanges plutôt qu'aux sommets de rectangles. Il serait cependant compliqué en pratique d'imposer une disposition aussi parfaitement géométrique, qui demanderait un repérage très précis des tuyaux ; la position des serpentins doit en outre s'adapter à la présence des galeries et des puits, de sorte qu'il est bon de laisser une certaine latitude dans la pose des tuyaux, en se bornant à prescrire l'écartement de ceux-ci plutôt que leur position précise.

D'ailleurs, la différence d'efficacité entre un réseau rectangulaire et un nid d'abeilles (qui présente la symétrie la plus complète) n'est pas si grande que l'on doive espérer un grand gain d'une solution intermédiaire, comme la disposition en losanges.

Pour le calcul, on admettra donc que le réseau des tubes de réfrigération est rectangulaire. Le calcul d'un tel réseau étant beaucoup plus long que celui d'un « nid d'abeilles », on pourra se contenter, les exemples ci-dessus ayant montré que la différence est assez faible, d'assimiler le réseau réel à un réseau hexagonal, dont les mailles auraient une section d'environ 10 % supérieure à celle des rectangles.

V - 1d) Influence du dégagement de chaleur de prise du ciment et de l'époque à laquelle débute la réfrigération

Les résultats des calculs faits sur trois ciments de natures très différentes sont donnés par les graphiques IV-17 et IV-18.

Pour mettre en évidence le rôle de l'échauffement initial et l'influence de la réfrigération, en particulier de l'époque à laquelle elle commence, on a choisi dans un premier exemple un béton dont la température, en régime adiabatique, monte rapidement assez haut : béton mis en œuvre en été, à une température initiale de 12° C, et dosage relativement élevé de 250 kg CP/m³ ; il atteindrait en une semaine environ 44° C. On a supposé, en outre, un réseau de tubes de réfrigération très serré (nid d'abeilles à mailles de 1,50 m) alimenté par de l'eau très froide, provenant d'un glacier, à +2° C.

Le graphique IV-17 montre que, dans ces conditions extrêmes, la température moyenne du béton monte à 34,5° si la réfrigération commence à l'âge de 24 heures, tandis qu'elle atteint un *maximum momentané* d'environ 9 à 10° C plus élevé si l'on retarde la réfrigération jusqu'au début du sixième jour. Cette différence est pratiquement une limite : elle est due au fait qu'entre un jour et cinq jours, le béton a dégagé la majeure partie de sa chaleur de prise ; il est clair que si le dosage est plus faible, ou si l'on emploie un ciment à échauffement plus lent, la différence sera plus faible ; de même, si la réfrigération est moins énergique.

On peut trouver un certain intérêt à commencer la réfrigération très tôt si l'on veut atténuer la première montée de température du béton ; le maximum atteint peut être ainsi diminué d'environ 5° C dans les cas courants et de 10° C dans les cas extrêmes de bétons à dégagement de chaleur élevé, réfrigérés très énergiquement.

On pourrait atténuer encore un peu la température maximum atteinte, en réfrigérant le béton dès sa mise en œuvre. Il ne serait toutefois pas désirable de gêner la prise normale du ciment dans le voisinage des serpentins en maintenant dès le début cette zone à une température très basse, de 2° à 3° C par exemple.

Pour un barrage que l'on veut claver et injecter par basse température pour combattre les effets des variations annuelles, la *température finale* du béton, au moment de l'injection, joue un rôle capital : c'est même le plus souvent la raison d'être de la réfrigération artificielle ; à ce point de vue, on ne constate aucune différence appréciable après cinq à six semaines, entre un béton réfrigéré dès la fin du premier jour et un béton réfrigéré à partir du sixième jour, bien que dans ce dernier cas, il parte d'une température initiale plus élevée ; la différence s'atténue rapidement et ne joue plus de rôle après quelques semaines ; tout au plus pourrait-on compter que si la réfrigération commence trois ou quatre jours plus tôt, elle s'achèvera aussi trois ou quatre jours plus tôt, ce qui en pratique n'a aucune importance pour une opération impossible à définir à un jour près, et qui dure généralement plusieurs mois. La *durée totale* de l'opération et la consommation d'eau seront identiques dans les deux cas.

Ceci s'explique aisément : le flux de chaleur de la masse du béton vers les tubes de réfrigération est d'autant plus intense que le gradient de température est plus fort ; au début, la différence entre le centre de la masse et le voisinage des tubes est grande, le flux est intense, le béton se refroidit facilement ; peu importe que le béton parte d'une température plus élevée : il se refroidit d'autant plus vite qu'il est plus chaud. Ce qui est capital, par contre, c'est la température de l'eau de réfrigération, spécialement vers la fin du refroidissement ; c'est elle qui détermine avant toute autre chose la température finale du béton ; il est évident que par le moyen de la réfrigération, l'on n'abaissera jamais la température du béton

au-dessous de celle des serpentins. *Si l'eau disponible n'est pas assez froide, on ne compensera jamais ce défaut par une augmentation du nombre des serpentins, et moins encore par une augmentation du débit.*

L'influence de la *nature du ciment, c'est-à-dire de la rapidité de son échauffement*, ressort du graphique IV-18 : le ciment de laitier, qui s'échauffe plus lentement que le Portland, atteint une température maximum moins élevée (alors même qu'après une durée de quelques semaines, il a dégagé au total le même nombre de calories) ; mais cet avantage, si c'en est un, peut devenir un inconvénient plus tard : à l'âge d'une quinzaine de jours, le béton de ciment Portland, qui a pratiquement terminé son dégagement de chaleur, est en pleine phase de refroidissement ; le ciment de laitier, lui, dégage encore de la chaleur, ce qui ralentit sa réfrigération, de sorte que sa température reste plus élevée que celle du Portland. Il est vrai que cette différence s'atténue ensuite et devient négligeable après deux mois.

La gêne apportée à la réfrigération par le dégagement tardif de la chaleur de prise est encore beaucoup plus sensible avec la pouzzolane ; la température maximum atteinte est relativement modérée (22° C contre 37° C pour le Portland et 30° C pour le ciment de laitier), mais la réfrigération est si retardée qu'il devient impossible de l'achever en même temps que celle des autres bétons.

Du point de vue thermique, l'emploi de la pouzzolane serait intéressant si les épaisseurs de l'ouvrage étaient assez faibles pour permettre à la chaleur de prise de se dissiper spontanément, ou presque, par rayonnement, c'est-à-dire pour des ouvrages qu'il n'est justement pas nécessaire de réfrigérer artificiellement.

En conclusion, pour ce qui concerne la *température finale* désirée d'un ouvrage massif réfrigéré artificiellement, on n'a pas intérêt à utiliser un ciment à dégagement de chaleur très lent, comme le ciment additionné d'une forte proportion de pouzzolane. A ce point de vue, le ciment Portland et le ciment de laitier peuvent être considérés comme équivalents, le second n'apportant aucun avantage sur le premier. On ne diminue pas non plus *la durée* de la réfrigération en commençant celle-ci immédiatement, plutôt qu'au bout de quelques jours après le bétonnage. La température maximum atteinte est un peu plus faible avec un ciment de laitier qu'avec un Portland ; cependant, le premier a tendance à se dessécher plus facilement, de

sorte que des fissures peuvent apparaître très rapidement si le béton n'est pas arrosé abondamment sur toutes ses faces dès les tout premiers jours et pendant assez longtemps, comme l'ont montré des exemples récents. La *montée initiale* de la température est un peu atténuée par une réfrigération immédiate ; cependant, il faut veiller à ne pas gêner la prise du ciment au voisinage des serpentins, par une réfrigération prématurée au moyen d'eau très froide.

V - 1e) Conclusions pratiques

Le calcul permet d'analyser et de prévoir l'évolution des températures d'un massif de béton réfrigéré artificiellement par une circulation d'eau, moyennant quelques hypothèses simplificatrices : masse de béton indéfinie, répartition uniforme des tubes de réfrigération en un réseau de forme géométrique régulière ; moyennant aussi que l'on connaisse les qualités thermiques du béton à réfrigérer : dégagement de la chaleur de prise et coefficient de diffusivité. Ces deux dernières grandeurs seront de préférence mesurées directement par des essais préliminaires, soit en laboratoire, soit, à plus grande échelle, sur le chantier. A défaut d'observations directes, on pourra baser provisoirement les calculs sur un dégagement de 80 à 90 calories par kg de ciment, et sur un coefficient de diffusivité compris entre 0,003 et 0,004 m²/h. Dès la mise en service de l'installation, on confrontera les prévisions du calcul avec les températures effectivement atteintes par le béton, pour contrôler et corriger les coefficients admis au départ, et modifier au besoin l'écartement des tuyaux pour la suite des travaux. Par des termes correctifs appropriés, on pourra également retoucher le schéma simplifié sur lequel se fonde le calcul, pour tenir compte, par exemple, de la dissipation naturelle de la chaleur par les faces libres du béton, et par la surface supérieure pendant les quelques jours qui séparent le bétonnage de deux levées consécutives ; ces corrections jouent d'autant moins de rôle que les masses sont plus grandes, c'est-à-dire que la réfrigération artificielle est plus nécessaire.

Par ordre d'importance, les qualités essentielles d'un système de réfrigération du béton sont :

la température de l'eau de réfrigération ;
l'écartement des tuyaux ;
la valeur du débit ;
le diamètre des tuyaux.

L'une de ces qualités fait-elle défaut, il est impossible d'y suppléer au moyen des autres : si l'eau n'est pas assez froide, on ne peut pas corriger cette insuffisance en serrant les tubes davantage ; si l'écartement est trop grand, on ne peut pratiquement pas le compenser par une augmentation du débit.

Le choix du diamètre des tuyaux, lui, dépend avant tout de la nécessité de limiter les pertes de charge hydrauliques pour faire circuler l'eau facilement dans des serpentins de 100 à 200 mètres de longueur.

V - 2. RÉALISATION ET EXPLOITATION D'UN DISPOSITIF DE RÉFRIGÉRATION

V - 2a) Ecartement des nappes de serpentins et des tubes d'une même nappe

Pour des raisons pratiques faciles à comprendre, les tubes de réfrigération façonnés et assemblés en forme de serpentins ne peuvent être posés commodément que sur les arrêts de bétonnage horizontaux ou très faiblement inclinés, c'est-à-dire sur la face supérieure des couches de bétonnage. L'écartement en hauteur des nappes de serpentins est ainsi égal à la hauteur des couches de bétonnage, généralement de l'ordre de 3,00 m. Exceptionnellement, si la hauteur des couches est faible, par exemple inférieure à 1,60 m, et si la durée de réfrigération est assez longue, on peut placer les serpentins toutes les deux couches seulement.

L'écartement des nappes étant déterminé, il reste à choisir l'écartement des tubes dans le plan des serpentins. On se reportera pour cela au calcul indiqué au paragraphe V-1a).

Il peut arriver que la température finale désirée au moment de l'injection des joints soit uniforme pour tout le barrage, par exemple lorsqu'il s'agit d'un barrage-poids, où la température de clavage

imposée dépend du degré d'ouverture fixé pour les joints, plutôt que des contraintes dues aux variations thermiques (ce qui serait le cas d'un barrage-voûte). Le programme des travaux permet de prévoir que les blocs bétonnés un certain mois devront être prêts pour l'injection, c'est-à-dire froids, à une époque déterminée. L'écartement des tubes dépend alors uniquement de la durée de réfrigération et de l'eau disponible pendant cette période ; on peut prescrire une règle simple, fixant par exemple un écartement valable pour tous les bétons d'un même mois.

Pour un barrage-voûte, on exige en général une réfrigération plus poussée à la base de l'ouvrage, où les arcs sont épais, que dans la partie haute, où les arcs sont plus souples et supporteront plus facilement par la suite les chutes de température extérieures. La température imposée lors du clavage diffère selon l'altitude, et l'écartement des tubes doit tenir compte à la fois de l'époque à laquelle le béton est mis en place (c'est-à-dire de la durée de réfrigération) et de la situation de ce béton dans le barrage. On cherchera cependant à réduire autant que possible le nombre de types de serpentins, en changeant d'écartement par sauts de 20 ou 50 centimètres, et en conservant un même type si possible sur 12 à 15 mètres de hauteur sur chaque voussoir. On se souviendra que, malgré tout le soin apporté aux calculs, ceux-ci ont un caractère de prévision, qui rend illusoire la recherche d'une très grande précision.

V - 2b) Longueur et diamètre des serpentins. Pertes de charge

Comme le montre, par exemple, le graphique IV-8, le diamètre des tubes ne joue pas un très grand rôle sur l'efficacité de la réfrigération. Pour les serpentins, on n'utilisera guère des tubes de diamètre supérieur à 1", à cause de leur coût et de leur trop grande rigidité ; du côté des petits diamètres, on ne descendra pas non plus au-dessous de $\frac{1}{2}$ ", à cause des pertes de charge hydraulique. Le diamètre des tubes sera donc compris entre $\frac{1}{2}$ " et 1", soit entre 12 et 25 mm environ. Le choix du diamètre est, en fait, essentiellement guidé par la question des pertes de charge, autrement dit de la pression nécessaire pour assurer la circulation de l'eau.

Les pertes de charge par frottement peuvent être calculées au moyen de la formule classique

$$\Delta h = \frac{\lambda}{D} L \frac{v^2}{2g}$$

où D représente le diamètre intérieur du tuyau, en m ;
 L » la longueur du tuyau, en m ;
 v » la vitesse de l'eau, en m/s ; et
 g » l'accélération de la pesanteur, 9,81 m/s².

Pour les conduites de petit diamètre (tubes des serpentins), d'après les essais de Vuskovič⁽¹⁴⁾ on peut admettre pour le coefficient λ la valeur 0,032. La figure V-3 donne les pertes de charge ainsi calculées, par m¹ de serpentin, pour des tubes de différents diamètres.

La formule ci-dessus et le graphique ne donnent que les pertes par frottement. Il faudrait y ajouter les pertes dues aux coudes, raccords et autres irrégularités. Les coudes ont en général un rayon très grand par rapport au diamètre des tubes ; ils ne créent pas de perte de charge notable. Il suffit donc de majorer les pertes par frottement de 5 à 10 % pour tenir compte des irrégularités de la section.

On s'arrange en général pour n'avoir sur tout le barrage que des tubes d'un seul diamètre, au maximum de deux diamètres différents, pour utiliser si possible partout les mêmes modèles d'accessoires : raccord, robinets, etc. Dans la zone inférieure du barrage, on n'aura généralement pas de peine à obtenir une pression suffisante pour alimenter des serpentins de 150 à 200 m de longueur, en tubes de $\frac{3}{4}$ " ou 20 mm environ de diamètre. Si, dans la partie haute du barrage, la pression disponible devient insuffisante pour assurer l'écoulement dans les mêmes conditions, on réduira la longueur des serpentins, en augmentant leur nombre en conséquence, plutôt que d'augmenter le diamètre des tubes.

Pour le calcul des conduites de plus gros diamètre amenant l'eau jusqu'aux serpentins, on pourra généralement appliquer la formule

⁽¹⁴⁾ J. VUSKOVIČ : *Der Strömungswiderstand von geraden Gasröhren*. Mitteilungen des Hydraulischen Institutes der Technischen Hochschule München, Heft 9, 1939.

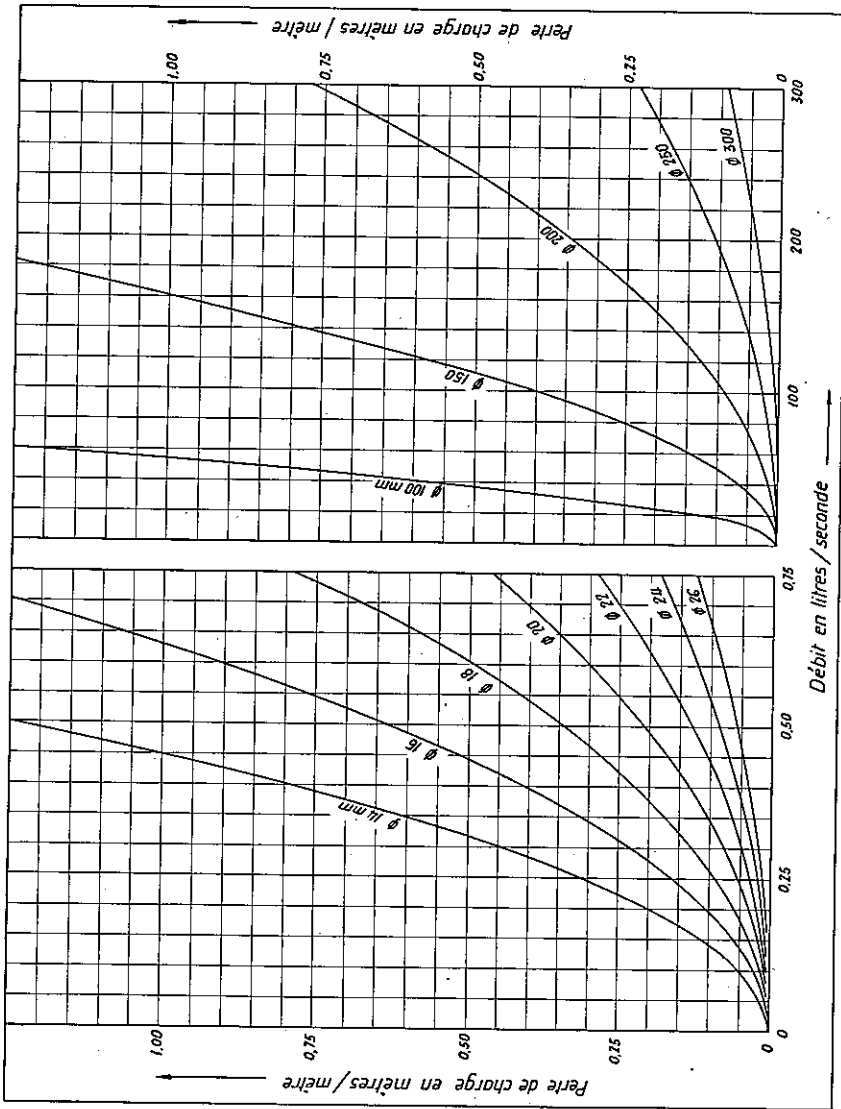


Fig. V-3. — Perte de charge dans les serpentins et les conduites d'adduction

de Strickler :

$$\Delta h = L \frac{v^2}{K^2 R^{4/3}} = \frac{6,35 v^2}{K^2 D^{4/3}}$$

en donnant au coefficient K la valeur 80 à 90, pour des tuyaux métalliques neufs, et 70 à 75 pour des tuyaux usagés.

La perte de charge par m^1 de tuyau, pour $K = 80$, est représentée dans la figure V-3 pour des tuyaux de 100 à 300 mm de diamètre.

V - 2c) Matériel des serpentins. Joints

On pourrait utiliser, pour les serpentins, les « tubes à gaz » qu'emploient couramment les appareilleurs. Ces tuyaux ont toutefois l'inconvénient d'être lourds et trop rigides pour se couder commodément à froid ; il faudrait donc soit couder les tuyaux à l'avance, à chaud, soit utiliser des coudes fabriqués industriellement ; d'autre part, leur raccord se fait au moyen de manchons filetés, rendus étanches au moyen de chanvre et de suif, dont la mise en place exige beaucoup de main-d'œuvre.

On trouve dans le commerce des tubes d'acier étiré, relativement minces et légers, que l'on coude facilement à froid jusqu'à des rayons de l'ordre de 0,70 m, ce qui permet de façonner les serpentins à la demande, sur le béton même. Les tubes utilisés aux barrages de la Grande-Dixence et de Mauvoisin, par exemple, ont un diamètre intérieur de 20 mm et extérieur de 22 mm.

L'épaisseur de la paroi de ces tubes, de 1 mm, est trop faible pour que l'on puisse y tailler un filetage ; les raccords peuvent se faire au moyen d'un manchon métallique intérieur, serré par deux écrous, à condition que l'on ait au préalable façonné une collerette aux extrémités des tubes, par emboutissage au moyen d'un mandrin, comme le montre la figure V-4.

On peut aussi relier les tubes par un manchon de caoutchouc, maintenu par des bagues qu'une pince spéciale permet de serrer fortement. L'expérience a montré que les manchons de caoutchouc, s'ils sont utilisés seuls, peuvent être déchirés accidentellement si les tubes sont légèrement déplacés après la pose des serpentins, par

exemple lors de la vibration du béton. Il faut renforcer le joint par un manchon métallique, à l'intérieur ou à l'extérieur des tubes, de préférence à l'extérieur pour ne pas gêner l'écoulement. Ce manchon métallique assure la liaison mécanique, tandis que le caoutchouc, recouvrant le tout, réalise l'étanchéité.

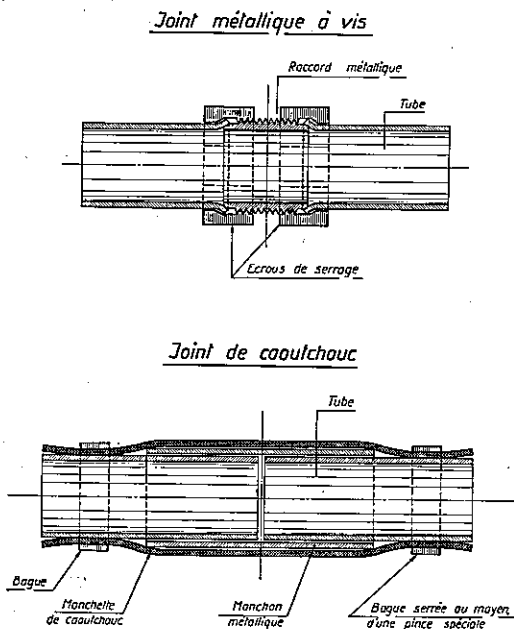


FIG. V-4. — Types de joints de tubes de serpentins

Une fois posés sur l'arrêt de bétonnage, les serpentins doivent y être fixés, soit au moyen de brides, soit simplement au moyen de fils de fer préalablement scellés dans le béton, afin de les maintenir bien en place lors du bétonnage de la couche suivante. Tout déplacement excessif peut en effet provoquer un défaut d'étanchéité des raccords.

V - 2d) Installation de distribution d'eau

Dans les régions où le gel n'est pas à craindre, les extrémités des serpentins peuvent déboucher sur le parement aval du barrage, où un réseau de canalisations relativement simple permet de les alimenter en eau. Parfois, un collecteur recueille l'eau qui ressort des serpentins ; d'autres fois, cette eau s'écoule librement sur le parement, qu'elle arrose en permanence, et favorise le durcissement du béton dans de bonnes conditions d'humidité.

Sous nos climats, les installations de réfrigération doivent aussi fonctionner pendant l'hiver ; il est même essentiel de profiter avant tout de cette période, pendant laquelle on dispose généralement d'eau très froide. Les installations doivent donc être à l'abri du gel. Les serpentins ne déboucheront plus sur le parement, mais dans des puits ménagés à l'intérieur même du béton, soit au centre de chaque bloc, soit à cheval sur deux blocs ; cette dernière disposition est la plus favorable, puisque d'un même puits, on peut atteindre les serpentins de deux blocs à la fois.

Une disposition qui s'est révélée pratique consiste à alimenter les serpentins par une colonne montante dans chacun des puits d'alimentation ; de distance en distance, chaque colonne porte un appareil de distribution, constitué par un tuyau de dérivation muni d'embranchements latéraux (voir fig. V-5) ; ceux-ci sont raccordés aux entrées des serpentins par des tuyaux flexibles, en caoutchouc. Ces raccords, faciles à mettre en place, permettent de brancher ou de déconnecter chaque serpentins à volonté et d'intercaler un compteur de débit lorsqu'on désire faire un contrôle. A défaut d'une vanne à l'entrée de chaque serpentins, il faut disposer en tout cas d'un robinet-vanne fixé à demeure sur chaque appareil de distribution, de manière à pouvoir régler au moins le débit global du groupe de serpentins alimentés par l'appareil. En outre, un robinet de purge doit permettre de prélever facilement et en tout temps un peu d'eau de réfrigération pour en mesurer la température.

Une colonne descendante, parallèle à la colonne montante et disposée de façon identique, recueille l'eau à la sortie des serpentins.

Les puits sont reliés à la base par une galerie, abritant une conduite maîtresse de grande section (200 à 300 mm de diamètre)

provenant d'un réservoir ou d'une station de pompage, et fournissant l'eau aux colonnes montantes ; semblablement, l'eau des colonnes descendantes est recueillie dans un collecteur principal.

Dans le cas d'un grand barrage, dont la construction s'étend sur plusieurs campagnes, les puits sont reliés non seulement par une galerie de pied mais par des galeries horizontales, à différents niveaux. Quand la réfrigération d'une zone est achevée, généralement au

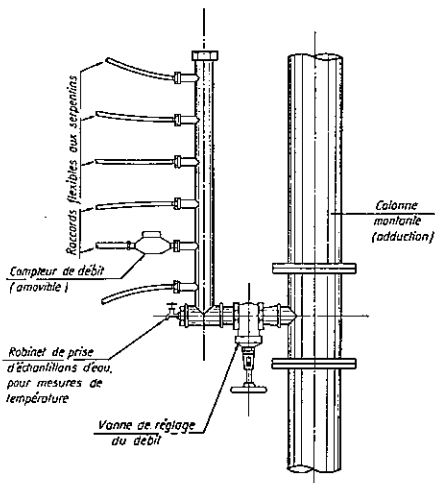


FIG. V-5. — Appareil de distribution de l'eau aux serpentins

printemps, on déplace les conduites maîtresses jusqu'à la galerie horizontale momentanément la plus élevée, d'où l'on repart avec de nouvelles colonnes montantes. Ainsi, on diminue la hauteur de ces colonnes, et par conséquent les pertes de charge, et l'on peut réutiliser pour la nouvelle campagne du matériel de l'année précédente.

La température de l'eau à la sortie des serpentins étant plus élevée qu'à l'entrée, il faut pouvoir inverser le sens de la circulation, chaque jour ou chaque semaine, de façon à égaliser les températures du béton le long des tubes. A cet effet, on peut installer un jeu de

vannes à la base de chaque puits, de manière à intervertir facilement les rôles des colonnes montantes et des colonnes descendantes ; il est souvent possible, et plus simple encore, d'installer un tel jeu de vannes en tête des conduites maîtresses ; en faisant jouer à la conduite d'adduction le rôle de collecteur et réciproquement, on inverse d'un coup la circulation de l'eau dans tout le barrage.

Fréquemment, la réfrigération du béton est payée à l'entreprise de construction du barrage en fonction de la quantité d'eau utilisée ; ce sera particulièrement le cas si cette eau doit être pompée d'une rivière. On installera alors un compteur au départ de chacune des deux conduites maîtresses et on relèvera quotidiennement leurs indications. Ces compteurs doivent pouvoir supporter sans dommage le renversement du sens de circulation de l'eau.

Si des compteurs de débit sont installés à la base des colonnes montantes, ce qui peut donner d'utiles contrôles, il est recommandable de les placer non pas directement sur le circuit, mais en dérivation sur un by-pass, où l'on ne fait passer l'eau qu'au moment des mesures. On augmente ainsi grandement la longévité de ces appareils et il n'y a pas d'inconvénient à ce que ces mesures, qui sont de simples contrôles, ne se fassent que temporairement. Les compteurs principaux, sur les conduites maîtresses, devront par contre fonctionner en permanence s'ils doivent servir à l'établissement des décomptes. Il est alors prudent de les doubler par d'autres appareils, du même modèle ou d'un type différent (Venturi par exemple), placés en dérivation, pour suppléer aux défaillances éventuelles de l'installation principale. Ces compteurs sont en effet soumis à un service très dur, que les meilleurs appareils ne supportent pas toujours sans dommages.

V - 2e) Pose et mise en service des serpentins

Les serpentins sont le plus souvent posés directement sur les arrêts de bétonnage, après décapage et nettoyage de la surface du béton. Sitôt après la mise en place d'un serpentín, on contrôlera tout d'abord que la circulation s'y fait normalement ; on vérifiera ensuite qu'il résiste à une pression au moins égale à la plus forte

de celles qu'il devra supporter en service. Si les joints ne se montrent pas parfaitement étanches, toute imperfection doit être immédiatement corrigée.

On peut dès lors procéder à la mise en place du béton de la couche supérieure.

On prescrit quelquefois que l'eau des serpentins soit maintenue sous pression, sans circuler, pendant toute la durée du bétonnage, afin que, si un raccord vient à être endommagé, par un vibrateur par exemple, on voie l'eau jaillir du béton comme un geyser et que l'on puisse faire à temps la réparation nécessaire. On a objecté à cette méthode que, si le raccord ne présente qu'une fuite minime, l'eau peut se répandre lentement sur l'arrêt de bétonnage et délayer le mortier, sans que l'on s'en aperçoive, ce qui compromettrait la résistance et l'étanchéité de la reprise de bétonnage. En raison de ce risque, il est plus prudent de couper la pression du serpentin jusqu'à ce que le béton ait fait prise. Pendant le bétonnage, on peut laisser passer un très faible débit d'eau, sous une pression presque nulle, de manière à entraîner le lait de ciment qui parviendrait à pénétrer dans un tube en cas de déplacement d'un joint ; on évite ainsi l'obstruction accidentelle des tubes par de la laitance.

Etant donné que l'on ne raccourcit pratiquement pas la durée totale de la réfrigération en commençant celle-ci dès la première heure (voir paragraphe V-1d) et qu'il vaut mieux ne pas entraver le processus de la prise du ciment, on ne met le serpentin en service que vingt-quatre à quarante-huit heures après le bétonnage ; pendant la saison froide, le début de la réfrigération peut même être retardé jusqu'au troisième jour.

Au moment de la mise en service d'un nouveau serpentин, on contrôlera toujours son débit, pour vérifier que les tubes n'ont pas été endommagés pendant le bétonnage. On peut, à cet effet, recueillir l'eau de sortie dans un récipient taré. Toutefois, lorsque le serpentин est branché sur une colonne de retour, il ne débite généralement pas dans une canalisation à écoulement libre, de sorte que son débit diffère de celui que l'on mesure à l'extrémité d'un tuyau libre ; il est alors préférable d'utiliser un compteur amovible que l'on intercale provisoirement entre l'appareil de distribution et le raccord flexible.

Pour faciliter les contrôles ultérieurs, le numéro du serpentín sera inscrit, au minimum par exemple, sur la paroi du puits, à côté de l'entrée et de la sortie des tuyaux ; il sera répété sur une étiquette métallique solidement fixée à l'extrémité du raccord flexible, près de l'appareil de distribution. Faute de ces précautions, faciles lorsqu'on les prend immédiatement, on s'expose à des confusions fâcheuses.

V - 2f) Contrôle périodique des débits

Outre les mesures que l'on fait au moment de la mise en service d'un serpentín, il convient de faire des contrôles périodiques, pour la simple raison déjà que le branchement de nouveaux serpentíns modifie peu à peu le débit des appareils connectés antérieurement ; un réglage peut être nécessaire de temps en temps ; quoiqu'une certaine modification de débit n'entraîne pas de grandes répercussions sur la durée de la réfrigération (voir paragraphe V-1b), il faut s'assurer qu'aucune obstruction accidentelle des canalisations ne s'est produite (*), et que personne n'a fermé certaines vannes intempestivement, comme on le voit parfois sur les chantiers. Il suffit pour cela de faire un certain nombre de sondages, une fois par semaine, en mesurant le débit de retour d'un serpentín sur six ou sur dix environ, au moyen du compteur amovible.

On lira régulièrement aussi les compteurs installés à l'entrée des conduites maîtresses ; cette dernière opération ne demandant ni peine ni temps, on la fera chaque jour.

Toutes ces observations seront consignées sur des formules ad hoc.

(*) On a constaté parfois que des serpentíns étaient obstrués après un certain temps de fonctionnement, probablement par des dépôts de limon. On ne l'éviterait guère en augmentant le diamètre des tubes, car, la vitesse de l'eau étant plus faible, les dépôts s'y produiraient plus facilement. Il n'est donc pas inutile d'insister auprès des entreprises pour que les serpentíns soient alimentés avec de l'eau propre, au besoin décantée préalablement si elle est pompée d'une rivière chargée d'alluvions.

V - 2g) Contrôle des températures

Les mesures de température peuvent viser deux buts : premièrement suivre les progrès de la réfrigération, contrôler le fonctionnement normal de l'installation, définir le moment où la température désirée est atteinte ; il s'agit de mesures que nous appellerons « de police », par lesquelles on cherche à connaître avant tout la température moyenne d'une certaine zone du barrage. Les mesures peuvent avoir un autre objectif, celui de contrôler les bases du calcul, de déterminer la valeur des coefficients thermiques effectifs du béton utilisé, afin d'apporter au besoin les ajustements nécessaires aux calculs des campagnes suivantes ; il s'agit alors de mesures plus « scientifiques », destinées à analyser plus en détail la distribution des températures locales au voisinage de quelques points, par exemple près des serpentins ou près des parements.

La manière la plus simple d'exécuter les mesures de police consiste à observer la température de l'eau des serpentins, après un certain temps de stagnation. Une fois par mois au moins, on interrompra la circulation dans un certain nombre de serpentins choisis d'avance, régulièrement espacés en hauteur (par exemple tous les 12 à 15 mètres) et en plan (par exemple un bloc sur deux). Après un jour de stagnation s'il s'agit de serpentins serrés (zone d'action d'un tube de l'ordre de 4 à 6 m²) et deux jours pour des réseaux peu denses (zone d'action de l'ordre de 10 à 12 m²), on prélèvera de l'eau de ces serpentins dans un récipient thermiquement isolé, pour en mesurer la température. On peut admettre (voir paragraphe IV-6) que celle-ci correspond à la moyenne du béton environnant. On répétera chaque mesure au moins trois à quatre fois, en soutirant chaque fois le moins d'eau possible, mais en éliminant un volume égal au contenu du tronçon de tuyau situé hors du béton (par exemple du raccord flexible si le prélèvement se fait à l'aval de celui-ci). Chaque fois que l'on soutire un peu d'eau chaude à la sortie, elle est remplacée par une entrée d'eau froide. Après un certain nombre de mesures, on constatera donc que la température de l'eau soutirée baisse ; il n'y a dès lors plus d'intérêt à poursuivre les mesures sur ce serpentin ce jour-là.

Ces mesures permettent de dresser, à époques régulières, une carte de l'état thermique du barrage.

On contrôlera et notera à cette occasion la température de l'eau à l'entrée d'un certain nombre de serpentins placés à différents endroits du barrage ; ces températures d'entrée doivent être peu différentes d'un point à l'autre, si les conduites d'adduction ne subissent pas des influences extérieures indésirables (insolation des tronçons situés en plein air) ; dans le cas contraire, il faudrait entreprendre ou compléter l'isolation de ces conduites.

Enfin, au groupe des mesures de police appartient aussi le contrôle de la température à l'entrée et à la sortie des conduites maîtresses. Deux thermomètres peuvent être fixés à demeure sur ces conduites, près des compteurs de débit. On notera chaque jour leurs indications, en même temps que celles des compteurs.

Quant aux mesures scientifiques, destinées à indiquer la température en certains points particuliers du béton, elles ne peuvent se faire qu'au moyen d'appareils de mesure à distance. On peut utiliser des thermomètres à résistance électrique, aujourd'hui tout à fait classiques, tels qu'on les a installés dans de nombreux barrages il y a plus de trente ans déjà. Etant donné que ces mesures s'étendent généralement sur une période limitée à la durée de la réfrigération, soit une année ou deux au maximum, on peut aussi faire usage d'une installation plus simple, formée de thermo-couples. Nous avons fait de bonnes expériences sur plusieurs barrages avec des câbles multiconducteurs en cuivre-constantan relativement peu coûteux, permettant de grouper des séries de thermo-couples sous forme de batteries d'éléments, faciles à poser dans le béton.

V - 3. CONFRONTATION DES TEMPÉRATURES CALCULÉES ET DES TEMPÉRATURES OBSERVÉES DANS UNE INSTALLATION EXISTANTE

Pour un barrage actuellement en construction, on a posé comme condition que le béton atteigne une température de 4° à 5° C au moment de l'injection des joints, au printemps qui suit le bétonnage. On diminue progressivement l'écartement des tubes au cours de la campagne de bétonnage, partant de 2,25 m au mois de mai pour tomber à 1,15 m au mois de novembre, afin qu'en avril de l'année

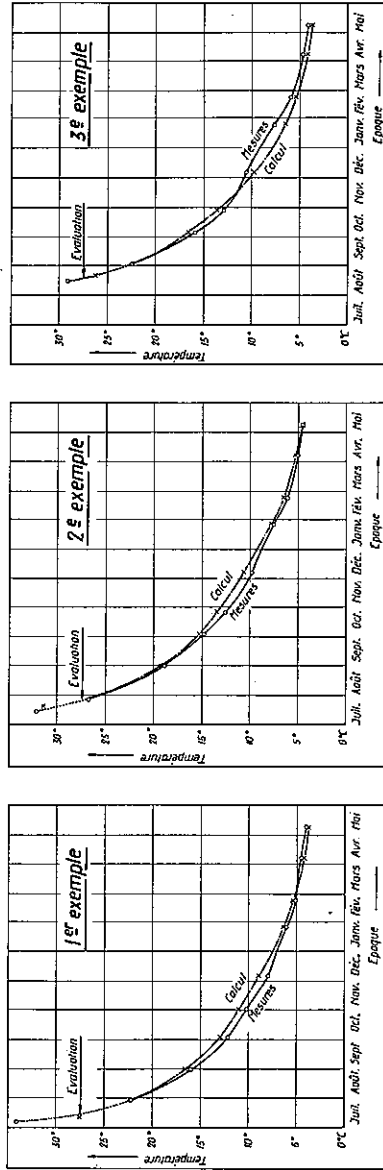


FIG. V-6. — Comparaison des températures du béton calculées et mesurées sur un barrage réfrigéré artificiellement.

suivante, tous les bétons arrivent simultanément à la température désirée. L'expérience a montré qu'en avril-mai, tous les bétons de l'année précédente ont effectivement une température voisine de 4° C. On peut en inférer, d'une part que la méthode de calcul est bonne, d'autre part que les coefficients admis et les hypothèses relatives à la température et au débit de l'eau de réfrigération sont proches de la réalité.

Dans le détail, les températures et débits de l'eau n'ont naturellement pas été aussi uniformes qu'on l'avait admis ; ils fluctuent toujours en raison de circonstances locales et momentanées impossibles à prévoir longtemps d'avance. Grâce aux mesures de température du béton et de l'eau et aux mesures de débit faites régulièrement, il est possible de comparer l'évolution de la température moyenne du béton avec celle que donne le calcul lorsqu'on y introduit, mois par mois, les températures et débits effectifs de l'eau. La figure V-6 donne, à titre d'exemple, le résultat de cette comparaison pour trois couches de béton différentes, dont deux ont été exécutées en juillet et une en août 1955. La température du béton n'ayant pas été mesurée au moment de la mise en place, mais généralement deux à trois semaines plus tard pour la première fois, nous avons pris cette première mesure comme point de départ du calcul. On peut considérer que la concordance des mesures et des résultats de ce calcul est, dans l'ensemble, très bonne. Pour la période comprise entre le bétonnage et la première mesure, nous avons cherché à évaluer la température du béton, d'une part en ajoutant l'effet de la chaleur de prise à la température des matériaux estimée d'après celle de l'air durant les jours précédents, d'autre part en faisant le calcul de réfrigération « à l'envers », en remontant dans le temps. Là encore, les chiffres obtenus sont tout à fait plausibles et concordants.

Ces résultats constituent donc une justification intéressante de la méthode de calcul de la réfrigération.

NOTE ANNEXE

**SUR LE REFROIDISSEMENT NATUREL DU BÉTON
DURANT LA PHASE D'ÉCHAUFFEMENT INITIAL**

par

CHARLES BLANC

professeur

directeur de l'Institut de mathématiques appliquées de l'Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne

Le but de cette note est double.

Tout d'abord, on montrera comment il est possible de déterminer la variation de température d'un massif de béton dont les faces sont maintenues à une température constante alors que l'intérieur s'échauffe sous l'effet du dégagement de la chaleur de prise du ciment ; il suffit pour cela de connaître la loi d'échauffement adiabatique et la loi de refroidissement d'un massif à température initiale uniforme, dont les faces subissent une chute de température donnée à l'origine des temps. Le calcul sera fait d'une manière complète pour un mur illimité à faces parallèles ; on montrera qu'il est possible, dès que l'épaisseur du mur est assez grande, de se limiter à une expression approchée simple ; on donnera les expressions correspondantes pour des prismes rectangulaires ou des cylindres circulaires.

On traitera ensuite le problème suivant : la dissipation de chaleur, durant la période initiale, est moindre que si le béton était d'emblée à la température finale d'échauffement adiabatique ; déterminer alors le retard équivalent de refroidissement.

Variation de température durant la phase initiale d'échauffement interne

Supposons que nous connaissons la loi d'échauffement adiabatique $E(t)$ (par exemple, celle qui est donnée par la figure III-13) ; soit d'autre part $\theta^*(x, y, z, t)$ la température du béton à l'instant t et au point $P(x, y, z)$, dans un massif dont la température initiale était $\theta_0 = 1^\circ \text{C}$ et dont les faces ont été portées à 0°C dès l'instant initial ; alors la température durant la phase d'échauffement est donnée par

$$(1) \quad \theta(x, y, z, t) = \int_0^t E'(t - \tau) \theta^*(x, y, z, \tau) d\tau ;$$

la méthode de la transformation de Laplace permet de l'établir facilement ⁽¹⁵⁾ ; on a en effet

$$\Delta^2 \theta^* - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad \theta^* = 1 \quad \text{pour} \quad t = 0$$

et

$$\Delta^2 \theta - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{1}{a} \frac{dE}{dt},$$

d'où, pour les transformées $u = \mathcal{L}\{\theta^*\}$ et $v = \mathcal{L}\{\theta\}$,

et

$$\Delta^2 u - \frac{s}{a} u = - \frac{1}{a}$$

$$\Delta^2 v - \frac{s}{a} v = - \frac{s}{a} \mathcal{L}\{E\},$$

avec les mêmes conditions sur les bords, d'où

$$v = s u \mathcal{L}\{E(t)\} = u \mathcal{L}\left\{\frac{dE}{dt}\right\},$$

donc, par le théorème de composition, la relation (1).

Ce résultat est facile à contrôler dans le cas d'un milieu dont la conductibilité thermique serait nulle : on aurait alors identiquement $\theta^* = 1$, d'où $\theta = E(t)$, ce qui était évident *a priori*.

⁽¹⁵⁾ Voir, par exemple, G. DOETSCH : *Handbuch der Laplace-Transformation*, Birkhäuser, Bâle, 1950, ou

⁽¹⁶⁾ CH. BLANC : *Les équations différentielles de la technique*, Griffon, Neuchâtel, 1948, pages 43 et suiv.

Cas du mur

Considérons un mur d'épaisseur L , de surface illimitée ; on désigne par x la distance à une face, et on suppose que la température ne dépend que de x et de t ; cherchons la fonction $\theta^*(x, t)$ dans ce cas, soit la solution du problème

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} = 0$$

avec $\theta^*(0, t) = \theta^*(L, t) = 0$

et $\theta^*(x, 0) = 1$;

cette solution pourrait s'obtenir sous la forme d'une série de Fourier en x ; elle aurait alors l'inconvénient de mal converger pour les petites valeurs de t , qui sont les seules intéressantes ici. Nous procéderons différemment ; introduisons encore la transformation de Laplace ; en posant

$$u(x ; s) = \mathcal{L} \{ \theta^*(x, t) \},$$

on a
$$\frac{d^2 u(x ; s)}{dx^2} - \frac{s}{a} u(x ; s) = -\frac{1}{a},$$

avec les conditions aux limites

$$u(0 ; s) = u(L ; s) = 0 ;$$

on trouve ainsi la solution

$$u(x ; s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} x + \text{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} (L - x)}{\text{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} L} \right] ;$$

en vue de revenir à la fonction $\theta^*(x, t)$, il importe de transformer ce résultat ; on remarque que

$$\frac{1}{\text{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} L} = \frac{2 e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} L}}{1 - e^{-2\sqrt{\frac{s}{a}} L}} = 2 \cdot e^{-\sqrt{\frac{s}{a}} L} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k\sqrt{\frac{s}{a}} L}$$

d'où

$$u(x; s) = \frac{1}{s} \left[\begin{array}{l} 1 + e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x} \sum_0^{\infty} e^{-(2k+1)\sqrt{\frac{s}{a}}L} - e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x} \sum_0^{\infty} e^{-2k\sqrt{\frac{s}{a}}L} \\ - e^{\sqrt{\frac{s}{a}}x} \sum_0^{\infty} e^{-(2k+1)\sqrt{\frac{s}{a}}L} + e^{\sqrt{\frac{s}{a}}x} \sum_1^{\infty} e^{-2k\sqrt{\frac{s}{a}}L} \end{array} \right]$$

Il est également utile de connaître la température moyenne

$$\bar{\theta}^*(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \theta^*(x, t) dx ;$$

sa transformée de Laplace est donnée par

$$\bar{u}(s) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x; s) dx$$

donc

$$\bar{u}(s) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{2}{L} \sqrt{\frac{a}{s}} \frac{\text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}}L}{\text{sh} \sqrt{\frac{s}{a}}L} \right)$$

d'où

$$\bar{u}(s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{2}{L} \sqrt{\frac{a}{s}} + \frac{4}{L} \sqrt{\frac{a}{s}} \sum_1^{\infty} (-1)^k e^{-k\sqrt{\frac{s}{a}}L} \right].$$

Pour revenir à $\theta^*(x, t)$ et $\bar{\theta}^*(t)$, il faut connaître les fonctions originales de

$$\frac{1}{s} e^{-\alpha\sqrt{s}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{s^{3/2}} e^{-\alpha\sqrt{s}}$$

dans la transformation de Laplace ; on trouve ainsi

$$\frac{1}{s} e^{-\alpha\sqrt{s}} = \varrho \left\{ 1 - H \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right) \right\}$$

$$\frac{1}{s^{3/2}} e^{-\alpha\sqrt{s}} = \varrho \left\{ 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} - \alpha \left[1 - H \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right) \right] \right\} ;$$

ici, $H(x)$ représente la *fonction intégrale d'erreur* ⁽¹⁷⁾

⁽¹⁷⁾ Elle joue, comme on le sait, un rôle important en théorie des erreurs (loi de Gauss-Laplace); ses valeurs se trouvent dans de nombreuses tables numériques; citons, parmi les plus complètes: *Tables of the Error Function and Its Derivatives*, Nat. Bureau of Standards, Appl. Math. Series, No. 41, 1954.

$$H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi_0}} \int_0^x e^{-z^2} dz.$$

Cela étant, il n'est plus difficile de revenir à $\theta^*(x, t)$ et $\bar{\theta}^*(t)$; on trouve en effet, en faisant la transformation terme à terme

$$\begin{aligned} \theta^*(x, t) = & 1 + \sum_0^{\infty} \left[1 - H \left(\frac{(2k+1)L+x}{2\sqrt{at}} \right) \right] \\ & - \sum_0^{\infty} \left[1 - H \left(\frac{2kL+x}{2\sqrt{at}} \right) \right] \\ & - \sum_0^{\infty} \left[1 - H \left(\frac{(2kH)L-x}{2\sqrt{at}} \right) \right] \\ & + \sum_0^{\infty} \left[1 - H \left(\frac{2kL-x}{2\sqrt{at}} \right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^*(t) = & 1 - \frac{4}{L} \sqrt{\frac{at}{\pi}} \left[1 + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{k^2 L^2}{4at}} \right] \\ & + 4 \sum_1^{\infty} k (-1)^k \left[1 - H \left(\frac{kL}{2\sqrt{at}} \right) \right]; \end{aligned}$$

toutes ces séries convergent très rapidement si t est assez petit et L assez grand. En effet, si la variable augmente, la fonction H tend très rapidement vers l'unité; on a par exemple $H(3) = 0,99998$; nous pouvons donc négliger les termes dont l'argument dépasse 3; si on prend pour a la valeur $0,004 \text{ m}^2/\text{h}$, si t ne dépasse pas 120 h (durée admise pour l'échauffement du béton) et si L est au moins égal à 4 m, on pourra également négliger les exponentielles et il restera les expressions approchées (à moins de 1 pour cent près),

$$\theta^*(x, t) = H \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + H \left(\frac{L-x}{2\sqrt{at}} \right) - 1$$

et

$$\bar{\theta}^*(t) = 1 - \frac{4}{L} \sqrt{\frac{at}{\pi}};$$

en particulier, pour le plan médian $x = \frac{1}{2}L$, on a

$$\theta^*(\frac{1}{2}L, t) = 2H \left(\frac{L}{4\sqrt{at}} \right) - 1.$$

On peut maintenant introduire ces résultats dans la relation (1), pour obtenir la température du béton, gâché à l'instant $t = 0$ (la température du gâchage étant prise pour température zéro) ; on a ainsi, en posant $\frac{dE}{dt} = f(t)$:

$$(2) \quad \theta(x, t) = \int_0^t f(t - \tau) \left[H \left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) + H \left(\frac{L - x}{2\sqrt{a\tau}} \right) - 1 \right] d\tau$$

et

$$(3) \quad \bar{\theta}(t) = \int_0^t f(t - \tau) \left[1 - \frac{4}{L} \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}} \right] d\tau.$$

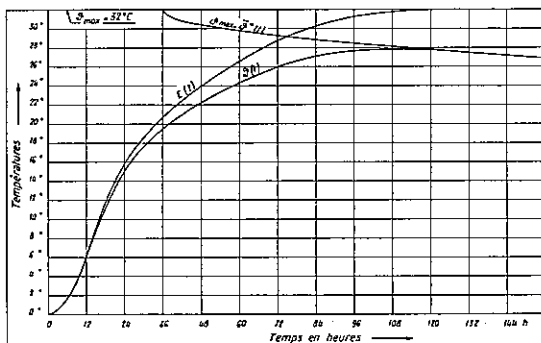


FIG. A-1.

Fonctions $E(t)$, $\theta(t)$ et $\theta_{\max} \bar{\theta}^*(t)$

La fonction $E(t)$ est en général donnée expérimentalement ; le plus simple sera alors de calculer ces intégrales par des sommations approchées.

Cas du prisme, du cylindre

Ces cas peuvent se traiter comme celui du mur (pour le premier, on peut utiliser les résultats précédents, pour le cylindre circulaire, on fait usage des fonctions de Bessel). Nous donnons seulement

l'expression approchée de la température moyenne, valable pour t assez petit (dans les limites indiquées plus haut).

Pour un *prisme de section rectangulaire*, de côtés A et B , on a

$$\bar{\theta}^*(t) = 1 - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \sqrt{at};$$

pour un *cylindre circulaire*, de rayon R , on a

$$\bar{\theta}^*(t) = 1 - \frac{4}{R} \sqrt{\frac{at}{\pi}}.$$

On passe de là, comme pour le mur, à la température moyenne durant la phase initiale par la formule

$$\bar{\theta}(t) = \int_0^t f(t-\tau) \bar{\theta}^*(\tau) d\tau.$$

On remarquera que dans chaque cas, si $a = 0$, on a simplement $\bar{\theta}(t) = E(t)$, ce qui est évident *a priori*.

Changement d'origine du temps

Soit θ_{\max} la température maximum atteinte dans un échauffement adiabatique, prenant pratiquement fin à l'instant $t = t_1$. On a donc

$$\theta_{\max} = E(t_1) = \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau;$$

calculons la valeur d'un retard Δt tel que si le corps était porté instantanément à la température θ_{\max} à l'instant Δt , sa température moyenne serait pour $t = t_1$ la même que celle que l'on a obtenue plus haut, en tenant compte de l'échauffement progressif. On doit donc avoir

$$\theta_{\max} \cdot \bar{\theta}^*(t_1 - \Delta t) = \theta(t_1) \quad (*)$$

soit, dans le *cas du mur*,

$$\theta_{\max} \left[1 - \frac{4}{L} \sqrt{a \frac{t_1 - \Delta t}{\pi}} \right] = \int_0^{t_1} f(t_1 - \tau) \left[1 - \frac{4}{L} \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}} \right] d\tau;$$

(*) Rappelons que $\bar{\theta}^*$ est en fait une température *relative*, puisqu'elle correspond à une température initiale égale à l'unité.

or

$$\int_0^{t_1} f(t_1 - \tau) d\tau = \theta_{\max},$$

d'où, après division par un facteur constant,

$$(4) \quad \theta_{\max} \sqrt{t_1 - \Delta t} = \int_0^{t_1} f(t_1 - \tau) \sqrt{\tau} d\tau,$$

d'où l'on tire Δt ; on remarque d'emblée que ce retard Δt est indépendant du coefficient a ainsi que de L (à condition toutefois que L ne soit pas trop petit, sinon nos approximations ne sont plus valables).

Si nous passons maintenant aux *cas du prisme ou du cylindre*, nous obtenons le même résultat: Δt est toujours donné par la relation (4). *En conclusion, nous voyons que le retard Δt ne dépend ni de la forme, ni des dimensions du corps considéré, ni même du coefficient a , qui est de nature physique; ce retard ne dépend que de la loi d'échauffement adiabatique; il faut seulement supposer le corps assez grand pour que nos approximations soient valables (4 m dans la plus petite dimension).*

Exemple numérique

Considérons un mur de 10 m d'épaisseur; soit d'autre part $a = 0,004 \text{ m}^2/\text{h}$; prenons enfin pour $E(t)$ la fonction représentée sur la figure III-13; ici $t_1 = 120 \text{ h}$, $\theta_{\max} = 32^\circ$; on en tire que $\frac{4}{L} \sqrt{\frac{a}{\pi}} = 0,0143 \text{ h}^{-\frac{1}{2}}$.

Si le mur était dès l'instant initial à la température de 32° (au-dessus de la température de gâchage, prise pour origine), sa température moyenne serait à l'instant t égale à

$$32^\circ (1 - 0,0143 \sqrt{t});$$

en tenant compte du fait que l'échauffement dure 120 h, on a en fait une température moyenne

$$\theta(t) = \int_0^t f(t - \tau) [1 - 0,0143 \sqrt{\tau}] d\tau.$$

Pour déterminer le retard Δt , on doit résoudre l'équation

$$32 (1 - 0,0143 \sqrt{120 - \Delta t}) = \int_0^{120} f(120 - \tau) [1 - 0,0143 \sqrt{\tau}] d\tau$$

d'où
$$32 \sqrt{120 - \Delta t} = \int_0^{120} f(120 - \tau) \sqrt{\tau} d\tau ;$$

une sommation approchée donne la valeur 294 pour l'intégrale ; on a donc

$$\sqrt{120 - \Delta t} = \frac{294}{32} ,$$

puis
$$t = 36 \text{ h} ;$$

d'après ce qui a été vu plus haut, ce résultat est encore valable pour un mur d'une autre épaisseur, un prisme, ou un cylindre ; de plus, il ne dépend pas de la valeur adoptée pour le coefficient a . La figure A-1 donne la représentation graphique des fonctions $\theta(t)$, $\theta_{\max} \theta^*(t - \Delta t)$ (qui se raccordent, comme il se doit, pour $t = 120$), ainsi que de la fonction $E(t)$.

BIBLIOGRAPHIE

Les numéros qui précèdent les noms correspondent à l'ordre dans lequel les auteurs sont cités dans la présent ouvrage.

Les numéros entre parenthèses sont ceux des pages où les auteurs sont mentionnés.

- | | |
|--|--------------------|
| 16. BLANC, CH. : <i>Les équations différentielles de la technique</i> . Griffon, Neuchâtel, 1948, pages 43 et suiv. | (154) |
| 11. CARSLAW, H. S. : <i>Conduction of heat in solids</i> . Dover, 1945 | (62) |
| 15. DOETSCH, G. : <i>Handbuch der Laplace-Transformation</i> . Birkhäuser, Bâle, 1950 | (154) |
| 7. FRÜH, J.-J. : <i>Geographie der Schweiz</i> . Saint-Gall, 1930. Tome I, page 282 | (31) |
| 4. HIRSCHFELD, K. : <i>Die Temperaturverteilung im Beton</i> . Springer-Verlag, Berlin, 1948 | (11) |
| 13. JAHNKE, E. et EMDE, F. : <i>Tables of functions</i> . Dover Publications, New York, 1945 | (89, 98, 100, 125) |
| 1. KORNFELD, H. : <i>Untersuchungen über die Temperaturverteilung</i> . Thèse. Schweizerische Verlags-Druckerei, Basel, 1936 | (10, 11, 12, 33) |
| 6. KUDERLI : <i>Manuel I</i> . Bâle, 1949 | (11) |
| 17. NATIONAL BUREAU OF STANDARDS : <i>Tables of the Error Function and its Derivatives</i> . Appl. Math. Series, No. 41. 1954 | (156) |
| b. NISOLLE, L. : <i>Régime de température et flux dans une paroi plane chauffée périodiquement</i> . « Chaleur et Industrie », Paris, n° 201, janvier 1937 | x |
| 12. POLYA, G. et SZEGÖ, G. : <i>Isoperimetric Inequalities in mathematical Physics</i> . Princeton University Press, 1951 | (72) |

3. RITTER, M. : *Oscillation de la température et contraintes thermiques dans les murs*. Association internationale des ponts et charpentes. Extrait du 7^e volume des « Mémoires », Zurich, 1943-1944, p. 297 (11, 15, 24)
5. SCHLEICHER, F. : *Taschenbuch für Bauingenieure*. Springer-Verlag, Berlin, 1955, page 440 (11)
9. SCHMIDT, E. : *Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik*. J. Springer, éd., Berlin, 1924 (53)
8. STODOLA, A. : *Turbines à vapeur et à gaz*. Ed. Dunod, Paris, 1925 (51)
2. STUCKY, A. : *Le barrage de la Dixence*. Bulletin technique de la Suisse romande des 16 février, 2 mars et 13 avril 1946 (10)
10. TIMOSHENKO, S. : *Théorie de l'élasticité*. Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liège, 1936 (55)
14. VUSKOVIČ, J. : *Der Strömungswiderstand von geraden Gasröhren*. Mitteilungen des Hydraulischen Institutes der Technischen Hochschule München, Heft 9, 1939 (140)

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE LA CONCORDE, A LAUSANNE,
EN OCTOBRE 1956



